第九章　合成應力

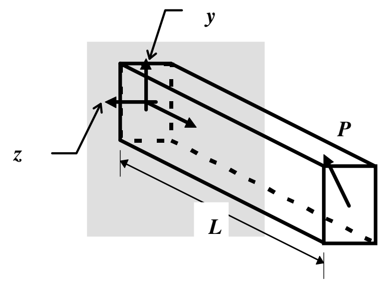
一、不對稱彎曲
二、偏心軸向負荷
三、彎矩與剪力
四、扭矩與正向力
五、扭矩與彎矩
六扭矩與剪力、

一、不對稱彎曲

任意斷面的樑受外力而產生彎曲時，因其可能不具任何對稱軸，或外力不在對稱軸上，而產生不對稱彎曲(Asymmetric bending)。

（一）雙對稱樑的彎曲

一有雙對稱軸斷面的懸臂樑，在自由端的形心上有一垂直於長軸的外力；在固定端所產生的反力矩可以分解成兩個指向垂直的力矩。相同的樑上各斷面內力，彎矩的部份也可如此分解。兩垂直彎矩各對斷面產生垂直的正應力並合成為合成應力。斷面剪力造成的剪應力數值較小，在此先不予討論。



P 與 z 軸的夾角為 α 可分解成 P_y 與 P_z；

$$P_y = P\cos\alpha$$

$$P_z = P\sin\alpha$$

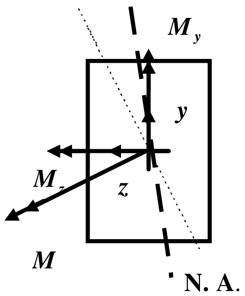
因此在固定端的內力（彎矩）M 可分解成：

$M_y = P_z L$

$M_z = P_y L$

$M_y ; M_z$ 分別對 x 平面產生正應力，其合成正應力為：

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$



在中性軸(N.A.: neutral axis)上正應力為零；

所以中性軸的直線方程式為：

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

$$y = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

若中性軸與 z 軸夾角 ϕ

$$\tan\phi = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y}$$

$$= \frac{I_z}{I_y} \tan\alpha$$

由上式可知：

若 $I_z > I_y$ 則 $\phi > \alpha$；若 $I_z < I_y$ 則 $\phi < \alpha$。

（二）任意斷面

計算任意斷面正應力分佈時須先求形心主慣性矩再作座標變換。

1. 慣性矩（複習）

一面積上的二垂直座標軸可定義下列慣性矩(moments of inertia)

$$I_x = \int y^2 dA \;; \qquad I_y = \int x^2 dA$$

一組平行的座標軸(x 軸與 $\underline{x}$ 軸)的慣性矩可以依據平行軸定理(parallel-axis theorem)計算。

$$I_x = I_{\underline{x}} + Ad_y^2$$

其中 d_y 為兩軸間的距離，若 x 軸通過形心則

I_x 為與其平行各軸的面積矩之最小值。

慣性積(product of inertia)

$$I_{xy} = \int xydA$$

若 x、y 軸分別為兩個對稱軸則

$$I_{xy} = 0$$

若 $\underline{x}$、$\underline{y}$ 軸分別與 x、y 軸平行的兩個軸則平行軸定理可寫成

$$I_{xy} = I_{\underline{xy}} + Ad_x d_y$$

慣性矩(polar moment of inertia):對於座標軸的中心 o 的慣性矩。

$$J_o = \int \rho^2 dA$$
$$= I_x + I_y$$

旋轉半徑(radius of gyration)

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad r_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

$$r_o^2 = r_x^2 + r_y^2$$

2. 主慣性矩(principle moments of inertia)

任意斷面上的兩垂直座標軸經過旋轉可以得到一對主慣性矩，此時慣性積為零。此對慣性矩一為最大慣性矩；另一為最小慣性矩。若通過形心的一組座標軸求得的主慣性矩稱為形心主慣性矩(centroidal principle moments of inertia)。主慣性矩之公式與應力轉換公式相近，可用類似 Mohr 圓的方法求得。

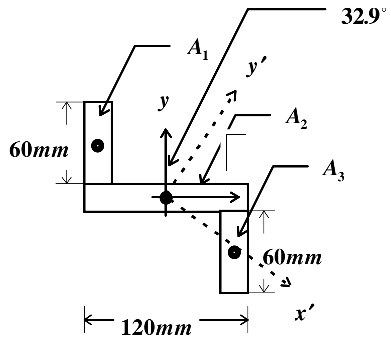
其對應關係為：

$$\left(I_x, I_y, I_{x'}, I_{y'}\right) \Rightarrow \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{x'}, \sigma_{y'}\right)$$

$$\left(-I_{xy}, -I_{x'y'}\right) \Rightarrow \left(\tau_{xy}, \tau_{x'y'}\right)$$

【例題】

如下圖由 A_1, A_2, A_3 組成之 Z 形斷面，試求其形心主慣性矩。三元件的寬度均為 20mm。



對於 xy 座標而言

$$I_x = \sum\left(I_{\bar{x}} + Ad_y^2\right)$$

$$= 2\left[\frac{1}{12}(20)(60)^3 + 20(20)(40)^2\right] + \frac{1}{12}(120)(20)^3$$

$$= 4.64 \times 10^6\, mm^4$$

$$I_y = \sum\left(I_{\bar{y}} + Ad_x^2\right)$$

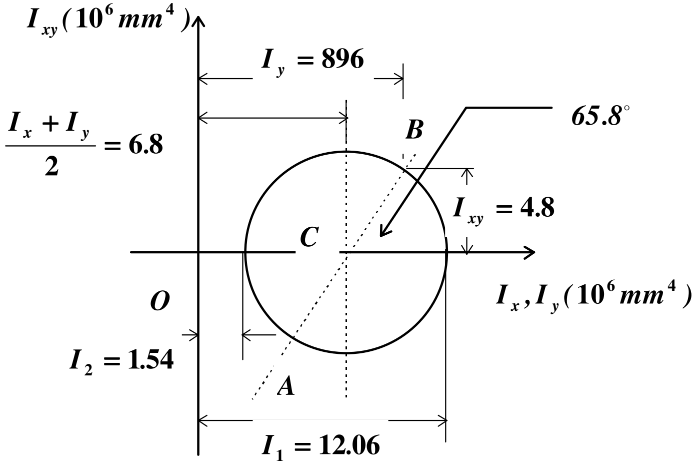
$$= 2\left[\frac{1}{12}(20)(60)^3 + 20(20)(50)^2\right] + \frac{1}{12}(20)(120)^3$$

$$= 8.96 \times 10^6\, mm^4$$

$$I_{xy} = \sum \left(I_{\bar{x}\bar{y}} + A d_x d_y \right)$$

$$= 0 + (20\times 60)(40)(-50) + 0 + (20\times 60)(-40)(50) + 0 + 0$$

$$= -4.8\times 10^6\, mm^4$$



利用 Mohr 圓

圓心 C：$\dfrac{I_x + I_y}{2} = 6.8\times 10^6\, mm^4$

A 點座標：$\left(I_x ,\ \underbrace{I_{xy}}_{\text{與應力Mohr圓符號不同}} \right) = (4.64, -4.8)\times 10^6\, mm^4$

半徑 R：$\sqrt{(6.8-4.64)^2 + (-4.8)^2} = 5.26\times 10^6\, mm^4$

$$I_1 = (6.8 + 5.26)$$
$$= 12.06\times 10^6\, mm^4$$
$$I_2 = (6.8 - 5.26)$$
$$= 1.54\times 10^6\, mm^4$$
$$\tan 2\theta_p = \frac{4.8}{(6.8-4.64)}$$
$$= 2.22$$
$$\theta_p = 65.8^\circ$$

由圖得知 x 軸順時針旋轉 32.9° 得到的 x' 軸 $I_{x'} = I_2$；y 軸順時針旋轉 32.9° 得到的 y' 軸 $I_{y'} = I_1$。

3. 不對稱彎曲的正應力分佈

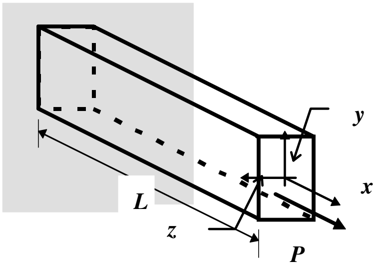
任意形狀的斷面上計算不對稱彎曲的正應力分佈，首先必須將通過形心的 xy 軸旋轉成具有形心主慣性矩的 $x'y'$ 軸。再用旋轉後的新座標計算各點的正應力。

$M_{y'}; M_{z'}$ 分別為彎矩對 $x'y'$ 軸的分力矩，其產生合成正應力為：

$$\sigma_x = -\frac{M_{z'} y'}{I_{z'}} + \frac{M_{y'} z'}{I_{y'}}$$

二、偏心軸向負荷

若一元件各斷面的形心在一直線上受軸向外力作用，但外力不在形心軸線；或斷面形心不在一直線上的元件受軸向負荷時，在斷面的內力同時有彎矩與正向力，這中負荷稱偏心軸向負荷(eccentric axial loads)。



P 在 yz 座標上為 (y_0, z_0) 則對斷面產生的彎矩分別為：

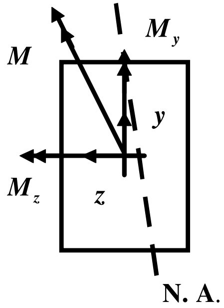
$$M_z = -Py_0$$

斷面彎矩與正向力產生的合成應力為：

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

或

$$\sigma_x = p\left(\frac{1}{A} + \frac{y_0 y}{I_z} - \frac{z_0 z}{I_y}\right)$$



在中性軸(N.A.: neutral axis)上正應力為零；所以中性軸的直線方程式為：

$$\frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

中性軸與 z 軸的截距為：

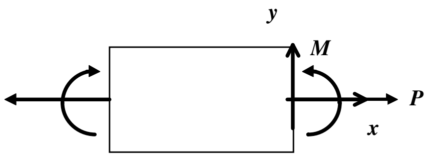
$$y = \frac{PI_z}{AM_z} = -\frac{I_z}{Ay_0}$$

中性軸與 y 軸的截距為：

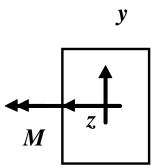
$$z = -\frac{PI_y}{AM_y} = \frac{I_y}{Az_0}$$

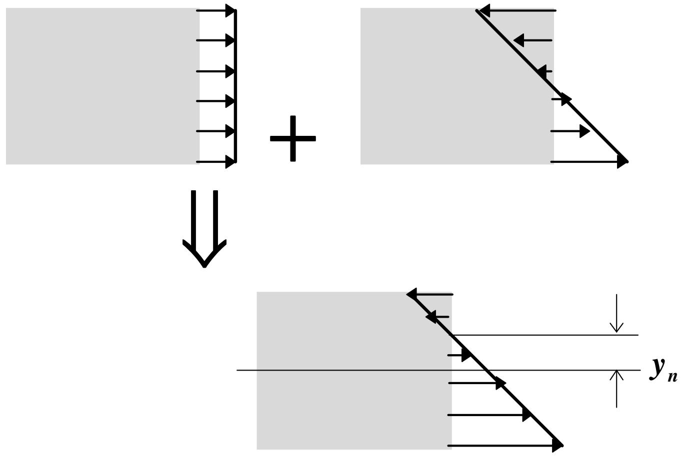
【特例】作用在對稱平面的偏心軸向負荷

若 ***xy*** 平面為對稱平面



側視圖:





斷面彎矩與正向力產生的合成應力為：

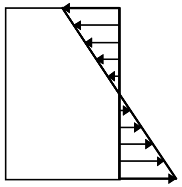
$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M\,y}{I_z}$$

中性軸為：

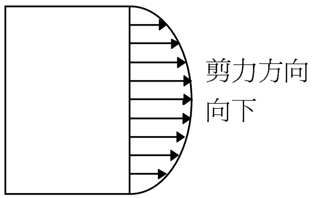
$$y_n = \frac{PI_z}{AM}$$

三、彎矩與剪力

梁受側向負荷時在斷面上有斷面彎矩與剪力作用。斷面彎矩形成正向力；斷面剪力產生剪應力，大小分佈如下圖：



正應力分佈圖



剪應力分佈圖

下圖為一集中負荷矩形斷面的簡支梁，正應力與剪應力兩者所構成的合成應力變化。

將主應力方向變化作圖稱之為主應力軌圖(principle stress trajectory) 。下列為幾個主應力軌圖的例子，圖中實線為張應力；虛線則為壓應力。若將主應力大小變化以等位線作圖，稱為應力等位圖(stress contours) 。

幾個主應力軌圖的實例

應力等位圖

依據計算在長跨距的矩形或圓形梁斷面上合成應力的主應力與最大剪應力仍以上下兩端為最大。但短跨距梁可能在中性軸上有最大主應力或最大剪應力。工字梁(W shapes or S shapes)因凸緣與腹板的交界有大的剪應力與正應力，可能主應力與最大剪應力會發生於該點。

樑的設計程序：

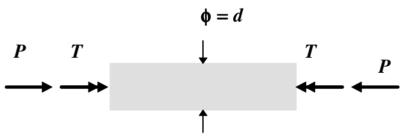
1. 畫負荷分佈圖，剪力分佈圖，彎矩分佈圖求斷面彎矩的最大值 $\left|M\right|_{max}$ 與斷面剪力的最大值 $\left|V\right|_{max}$ 。
2. 假設最大主應力發生於上下兩端 $y = \pm c$ ，計算出必須的最小斷面模數

$$S_{min} = \frac{\left|M\right|_{max}}{\sigma_{all}}$$

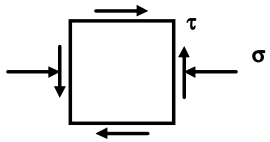
3. 選擇樑的尺寸使斷面模數大於上述最小值。
4. 計算中性面上的剪應力，檢查主應力與最大剪應力是否大於容許值。
5. 工字樑等不規則斷面必須再檢查形狀有劇烈改變的接點如凸緣與腹板接點的主應力與最大剪應力是否大於容許值。

四、扭矩與正向力

鑽孔的鑽頭在作業時同時受到正向力(壓力)與扭矩產生的剪應力。若正向力為 P ；扭矩為 T 則



在圓周上任一點：



（上視圖或正視圖）

正應力 σ

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

剪應力 τ

$$\tau = \frac{T(d/2)}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

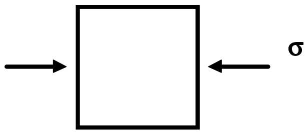
最大剪應力 τ_{max}

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{2P}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

最大正應力

$$\sigma_{1,2} = -\left(\frac{2P}{\pi d^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2P}{\pi d^2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

在圓心上：



（上視圖或正視圖）

正應力 $\boldsymbol{\sigma}$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

剪應力 $\boldsymbol{\tau}$

$$\tau = 0$$

最大剪應力 τ_{max}

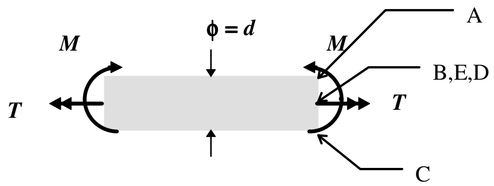
$$\tau_{max} = \frac{2P}{\pi d^2}$$

最大正應力

$$\sigma_{1,2} = 0; -\left(\frac{4P}{\pi d^2}\right)$$

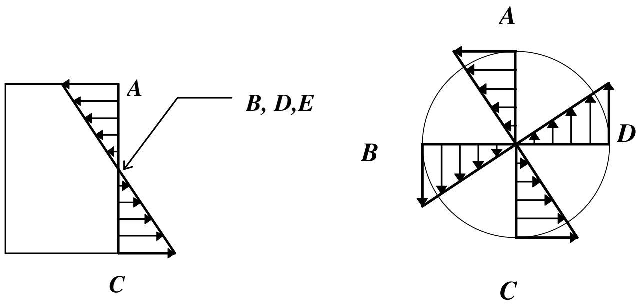
五、扭矩與彎矩

動力輸送軸如齒輪軸與皮帶輪軸在作業時同時受到彎矩產生的正向力與扭矩產生的剪應力。若彎矩為 M ；扭矩為 T 則



正應力 σ 的分佈為

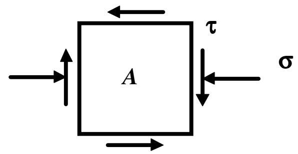
$$\sigma = -\frac{64My}{\pi d^4}$$



剪應力 τ 的分佈為

$$\tau = \frac{T(r)}{J} = \frac{32Tr}{\pi d^4}$$

A 點（上視圖）：



正應力：$\sigma = -\frac{32M}{\pi d^3}$；　剪應力：$\tau = \frac{16T}{\pi d^3}$

最大剪應力 τ_{max}

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{16M}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$= \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

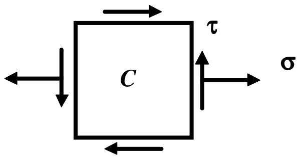
或定義等效扭矩 T_c

$$T_c = \frac{\tau_{max} J}{d/2} = \sqrt{M^2 + T^2}$$

最大正應力：

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3}\left(-M \pm \sqrt{M^2 + T^2}\right)$$

C 點（上視圖）：



正應力：$\sigma = \dfrac{32M}{\pi d^3}$；　剪應力：$\tau = \dfrac{16T}{\pi d^3}$

最大剪應力 τ_{max}

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{16M}{\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$= \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

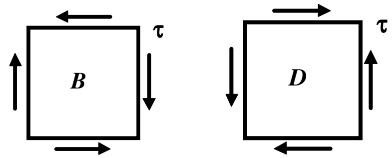
或定義等效扭矩 T_c

$$T_c = \frac{\tau_{max} J}{d/2} = \sqrt{M^2 + T^2}$$

最大正應力：

$$\sigma_{1,2} = \frac{16}{\pi d^3}\left(M \pm \sqrt{M^2 + T^2}\right)$$

B 點（上視圖）： D 點（上視圖）：



正應力：$\sigma = 0$；　剪應力：$\tau = \dfrac{16T}{\pi d^3}$

最大剪應力 τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

最大正應力：

$$\sigma_{1,2} = \pm\frac{16T}{\pi d^3}$$

圓心 E 點：

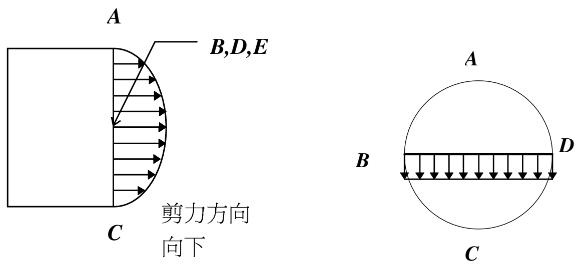
正應力與剪應力均為零。

六、扭矩與剪力

平均半徑為 R 的緊密的螺旋彈簧受一個外力 P，在斷面的內力為扭矩 $T = PR$ 與剪力 $V = P$。若彈簧線的直徑為 d 如下圖所

示：

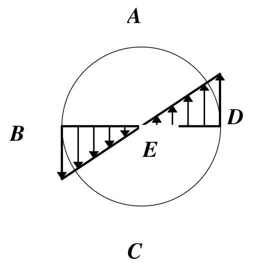
剪力產生的剪應力最大值在 BED 線上：



$$\tau_s = \frac{PQ}{It} = \frac{4P}{3A}$$

$$= \frac{16P}{3\pi d^2}$$

扭矩產生的剪應力最大值在圓周上：



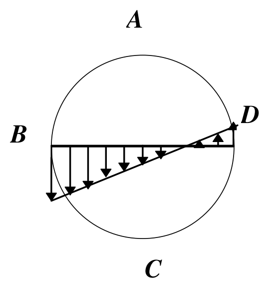
$$\tau_T = \frac{T(d/2)}{J} = \frac{16PR}{\pi d^3}$$

合成剪力：

A 點與 C 點：

$$\tau_{max} = \tau_T = \frac{16PR}{\pi d^3}$$

B 點：



$$\tau_{max} = \tau_s + \tau_T$$
$$= \frac{16P}{3\pi d^2} + \frac{16PR}{\pi d^3}$$
$$= \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{3R}\right)$$

或寫成：

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{0.667}{m}\right)$$

其中 $m = 2R/d$

D 點：

$$\tau_{max} = \tau_s - \tau_T$$
$$= \frac{16P}{3\pi d^2} - \frac{16PR}{\pi d^3}$$
$$= \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 - \frac{d}{3R}\right)$$

圓心 E 點：

$$\tau_{max} = \tau_s = \frac{16P}{3\pi d^2}$$

因此彈簧之最大剪應力為：

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{0.667}{m}\right)$$

依據 Wahl(1963)考慮彈簧前後端不完整的部份與剪力產生剪應力的實際分佈得：

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0.615}{m}\right)$$

緊密纏繞彈簧的伸長量：

對彈簧的一小段扭矩產生的扭轉角為：

$$d\phi = \frac{TdL}{GJ}$$

其對應的伸長量為：

$$d\delta = Rd\phi = \frac{RTdL}{GJ}$$

n 圈的彈簧長度為 $L = 2\pi Rn$；彈簧總伸長量為：

$$\delta = \frac{RTL}{GJ}$$
$$= \frac{64nPR^3}{d^4 G}$$

彈簧常數(spring constant)：

$$K = \frac{P}{\delta}$$

$$\therefore K = d^4 G / 64nR^3$$