第八章應力與應變轉換

一、應力轉換

二、平面應力 Mohr 圓

三、最大剪應力

四、應變轉換

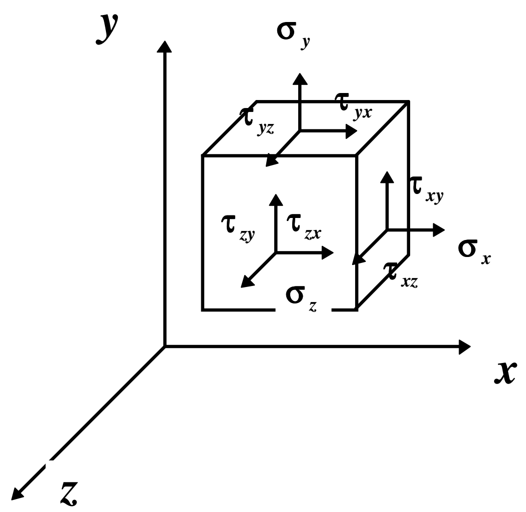
五、應變量測

六、虎克定律通式

一、應力的轉換

（一）應力的標記

元件內一點各方向所受的應力可標記如下圖：



符號規則：

σ_i :正應力(張力為正)

τ_{ij} ：剪應力

i:法線方向為 i 之平面

j:剪力方向為 j

若$i \neq j \Rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$

（二）平面應力的轉換

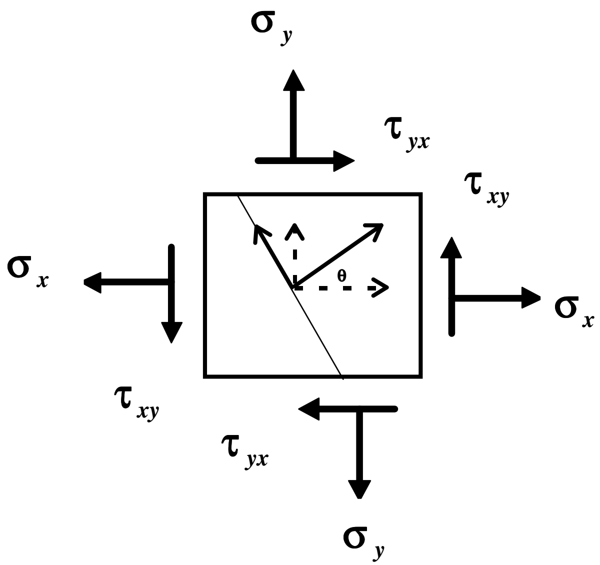
1. 平面應力

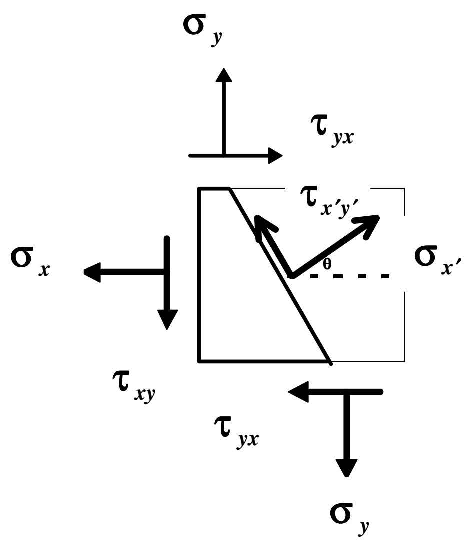
$$\sigma_z = 0$$

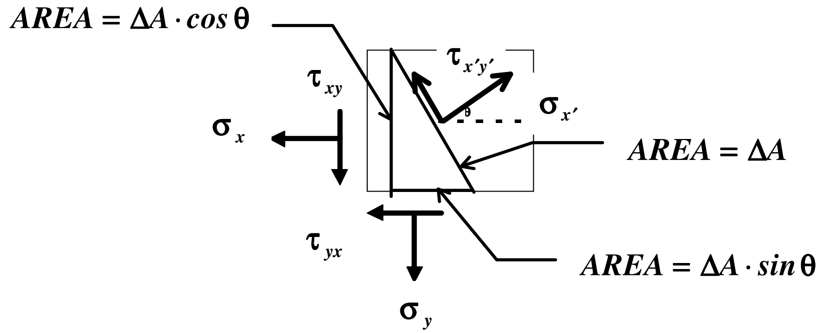
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

2. 應力轉換公式







$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x \cos\theta(\Delta A\cos\theta) - \tau_{xy}\sin\theta(\Delta A\cos\theta)$$

$$-\sigma_y \sin\theta(\Delta A\sin\theta) - \tau_{xy}\cos\theta(\Delta A\sin\theta) = 0$$

$$\sum F_{y'} = 0$$

$$\tau_{x'y'}\Delta A - \sigma_x \sin\theta(\Delta A\cos\theta) - \tau_{xy}\cos\theta(\Delta A\cos\theta)$$

$$-\sigma_y \cos\theta(\Delta A\sin\theta) + \tau_{xy}\sin\theta(\Delta A\sin\theta) = 0$$ 整理

得：

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2}(1-\cos 2\theta) + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$= \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

.........(1)

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$ .....(2)

y' 軸與 x' 軸夾 90°，以 $\theta + 90^\circ$ 代入(1)之 θ

$$\sigma_{y'} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

.........(3)

(1)+(3)得

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = const.$$

（三）平面主應力與平面最大剪應力

1.平面應力的極值

$$\sigma_{x'}=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\frac{\partial\sigma_{x'}}{\partial\theta}=0$$

$$(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta-2\tau_{xy}\cos 2\theta=0$$

$$\tan 2\theta_p=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

在與 x 軸夾 θ_P 角度的方向 $\sigma_{x'}$ 有極值。此時

$$\tau_{x'y'}=-(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta+2\tau_{xy}\cos 2\theta=0$$

故 $\sigma_{x'}$ 為極值時與其垂直之 $\tau_{x'y'}=0$。

又因 $\tan 2\theta_P=\tan(2\theta_P+\pi)$

所以在 180° 範圍內 $\sigma_{x'}$ 有兩個極值；其一為最大值，另一為最小值。所在的平面相差 90°

2.主平面(Principle Planes)與

主應力(Principle Stress)

主平面為 $\tau_{x'y'}$ 為零的平面，在此平面的正應力為最大正應力或最小正應力，稱為主應力。

主平面與 x 軸之夾角為 θ_P。

$$\sigma_{max},\sigma_{min}=\sigma_1,\sigma_2$$

$$=\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}\ \cdots(5)$$

且

$$\sigma_{max}+\sigma_{min}=\sigma_1+\sigma_2$$

$$=\sigma_x+\sigma_y$$

3. 平面最大剪應力

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial \theta} = 0$$

$$-\left(\sigma_x - \sigma_y\right) \sin 2\theta - 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_S = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad \text{.........(6)}$$

C. f.(4),(6)

$$\tan 2\theta_P \cdot \tan 2\theta_S = -1$$

$2\theta_P$ 與 $2\theta_S$ 相差 90°； θ_P 與 θ_S 夾角 45° 。

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} \quad \text{...(7)}$$

因 $\tan 2\theta_S = \tan\left(2\theta_S + \pi\right)$

所以在 180° 範圍內 $\tau_{x'y'}$ 有兩個最大剪應力平面。兩平面相差 90°

在最大剪應力平面的正應力 σ_S

因 $\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \sigma_S$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_s = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$= \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad \text{..................(8)}$$

二、平面應力之 Mohr 圓

（一）Mohr 圓

由（1）

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right] = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) cos\,2\theta + \tau_{xy}\, sin\,2\theta$$

....（1′）

$(1')^2 + (2)^2$

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right] + \left(\tau_{x'y'}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

定義：

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad , \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$\left(\sigma_{x'} - \sigma_{avg}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad ......（9）$$

在 $\sigma_{x'} v.s. \tau_{x'y'}$ 的座標平面上式(9)為

以 $(\sigma_{avg},0)$ 為圓心； R 為半徑之圓。

此圓稱為 Mohr 圓；

(σ_x, τ_{xy}) ，(σ_y, τ_{xy}) 將為於其圓週之上。

（二）Mohr 圓的建立步驟

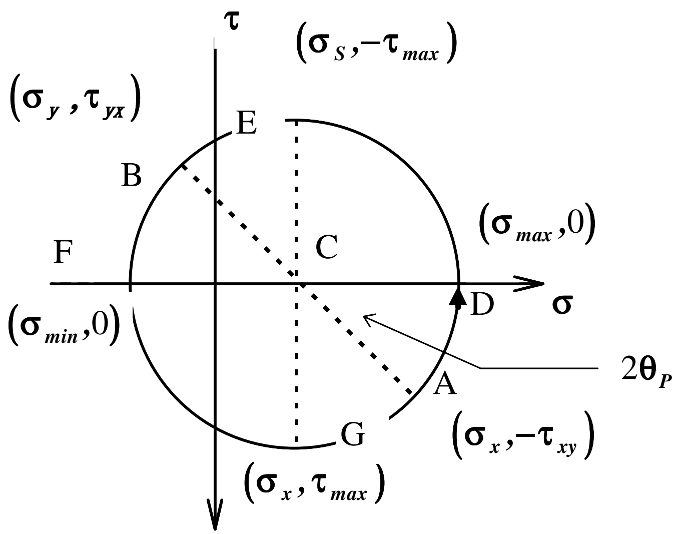
（i） 以 $\sigma_{x'} v.s. \tau_{x'y'}$ 為座標

（ii） 以 $((\sigma_x + \sigma_y)/2,0)$ 為圓心

（iii） 於座標上取 $A(\sigma_x, -\tau_{xy})$

（iv） 以 C 為圓心，CA 為半徑畫圓。

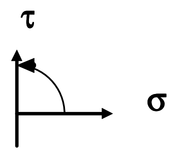
（v） AC 延長線交圓周於 B 點其座標為 $B(\sigma_x, \tau_{yx})$



（三）Mohr 圓的特性與意義

1.Mohr 圓上剪力正負號規則：

負方向：



故 τ_{xy} 的正方向為負值；位於Ⅲ、Ⅳ象限。

τ_{yx} 的正方向為正值；位於Ⅰ、Ⅱ象限。

2.由 A 點沿著圓周逆時針方向旋轉 $2\theta_P$，交 X 軸於 D 點，其座標為 $(\sigma_{max}, 0)$ 為平面最大正應力。最大正應力方向與 X 軸方向之夾角為 θ_P（逆時針方向）。

3.由 D 點沿著圓周逆時針方向旋轉 90°，為點 E，其座標為 (σ_S, τ_{max})，τ_{max} 為平面最大剪應力，其所作用的平面指向與 X 軸夾 $\pi/4 + \theta_P$（逆時針方向）。

3.E 點沿著圓周逆時針方向旋轉 90°，為點 F，其座標為 $(\sigma_{min}, 0)$，σ_{min} 為平面最小正應力，其方向與 X 軸夾 $\pi/2 + \theta_P$（逆時針方向）。

4. 由 F 點沿著圓周逆時針方向旋轉 90°，為點 G，其座標為 $(\sigma_s, -\tau_{max})$，τ_{max} 為平面最大剪應力，其所作用的平面指向與 X 軸夾 $3\pi/2+\theta_P$（逆時針方向）。

5. 平面最大正應力方向與原座標最大正應力（數值最大）的夾角恆介於 $\pm\pi/2$ 之間。

（四）由 Mohr 圓求各種公式

1. 主應力

圓心 $(\sigma_{avg}, 0)$; $\sigma_{avg} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$

A 點：$(\sigma_x, -\tau_{xy})$

半徑 $R = \sqrt{\left(\sigma_x - \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{max}\\ &= \sigma_{avg}+R\\ &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_{min}\\ &= \sigma_{avg}-R\\ &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

2. 主平面

主平面指向與 x 軸夾角

$$2\theta_P = tan^{-1}\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{avg}}\right)$$

$$= tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

3. 平面最大剪應力

所在平面指向與主平面夾 45°

$$\tau_{max} = \pm R$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

4. 任意方向的正應力與剪應力

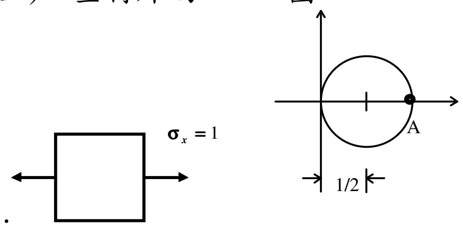
所求平面與 x 軸夾角為 θ（由 x 軸逆時針方向為正）

$$\theta' = 2\theta - 2\theta_P$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_{avg} + R\cos\theta'$$

$$\tau_{x'y'} = R\sin\theta'$$

(五)一些特殊的 Mohr 圓



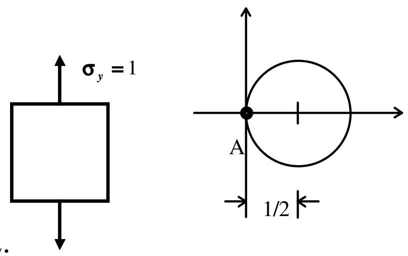
1.

$\sigma_{max} = 1$ $\quad\theta_P = 0$

$\sigma_{min} = 0$ $\quad\theta_P = \pi/2$

$\tau_{max} = 1/2$ $\quad\theta_s = \pm\pi/4$

$\sigma_s = 1/2$



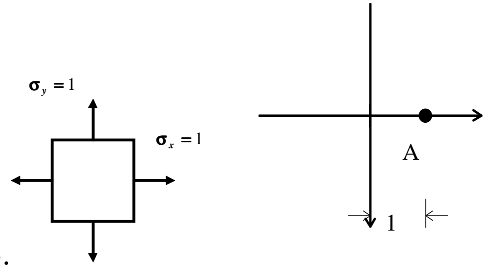
2.

$\sigma_{max} = 1$ $\quad\theta_P = \pi/2$

$\sigma_{min} = 0$ $\quad\theta_P = 0$

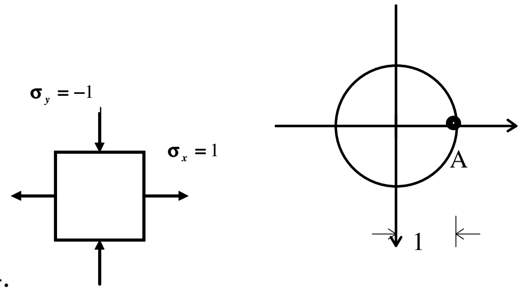
$\tau_{max} = 1/2$ $\quad\theta_s = \pm\pi/4$

$\sigma_s = 1/2$



3.

$\sigma_{x'} = 1$ $\quad\tau_{x'y'} = 0$



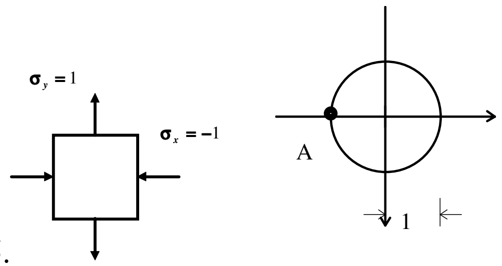
4.

$\sigma_{max} = 1$ $\quad\theta_P = 0$

$\sigma_{min} = -1$ $\quad\theta_P = \pi/2$

$\tau_{max} = 1$ $\quad\theta_s = \pm\pi/4$

$\sigma_s = 0$



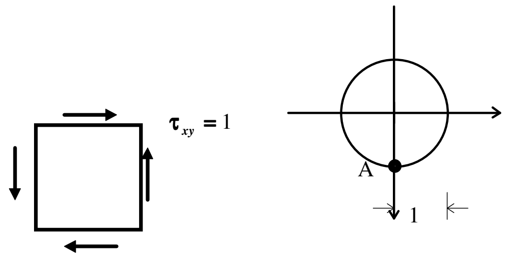
5.

$\sigma_{max} = 1$ $\qquad$ $\theta_P = \pi/2$

$\sigma_{min} = -1$ $\qquad$ $\theta_P = 0$

$\tau_{max} = 1$ $\qquad$ $\theta_s = \pm\pi/4$

$\sigma_s = 0$



6.

$\sigma_{max} = 1$ $\qquad$ $\theta_P = \pi/4$

$\sigma_{min} = -1$ $\qquad$ $\theta_P = -\pi/4$

$\tau_{max} = 1$ $\qquad$ $\theta_s = 0, \pi$

$\sigma_s = 0$

三、最大剪應力

在本節以前計算出的最大剪應力都標為

『平面』最大剪應力，因其數值並不一定是該點實際上最大的剪應力。

考慮下列狀況：課本 P.519; Fig 8.30

σ_1, σ_2 為 xy 平面的主應力，z 軸方向的主應力為 $\sigma_3 = \sigma_z = 0$

在此狀況下得到的最大剪應力為 $\tau_{max} = \sigma_1/2$

位於 AFGD 與 BEHC 平面上。

課本 P520, Fig 8.31

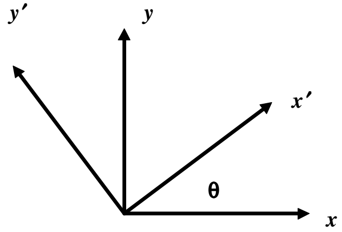
$$\sigma_{max} = Max[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$$

$$\sigma_{min} = Min[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

四、應變轉換

（一）應變轉換公式



xy 座標經旋轉成新的 $x'y'$ 座標，由座標轉換公式得：

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$x'y'$ 座標上的一個水平位移 u'，

在 xy 座標則可表

$$u' = u\cos\theta + v\sin\theta$$

由應變的為分形式得

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial u'}{\partial y}$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sin^2\theta\frac{\partial v}{\partial y}$$

所以

$$\varepsilon'_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

同理

$$\varepsilon'_y = \frac{\partial v'}{\partial y'}$$

$$\varepsilon'_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}$$

$$\frac{\gamma'_{xy}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

將應力轉換公式與應變轉換公式比較

$$\sigma_x \to \varepsilon_x$$

$$\sigma_y \to \varepsilon_y$$

$$\tau_{xy} \to \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

（二）主方向與主應變

與應變轉換公式類比可得最大與最小正應變稱為主應變(principle strain) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

其作用方向稱為主方向(principle direction) 主方向 θ_P

$$\tan 2\theta_P = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

同理平面最大剪應變為

$$\frac{\gamma_{max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

（三）應變 Mohr 圓的建立步驟

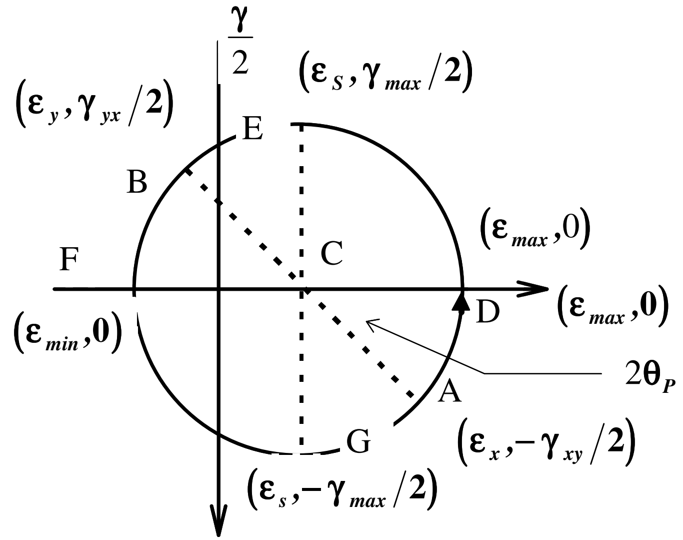
(i)　以 $\varepsilon_{x'}\ v.s.\ \gamma_{x'y'}/2$ 為座標

(ii)　以 $\left((\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2, 0\right)$ 為圓心

(iii)　於座標上取 $A\left(\varepsilon_x, -\gamma_{xy}/2\right)$

(iv)　以 C 為圓心，CA 為半徑畫圓。

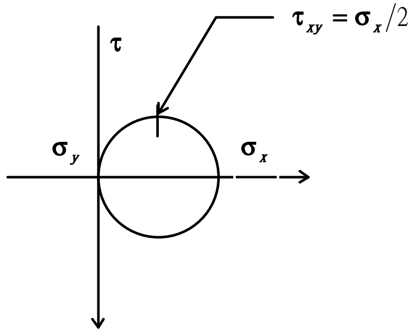
(v)　AC 延長線交圓周於 B 點其座標為 $B\left(\varepsilon_y, \gamma_{yx}/2\right)$



《例題》E 與 G 的關係

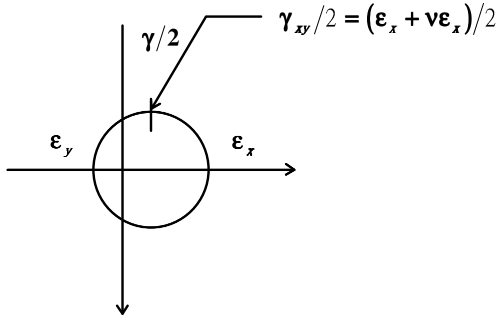
有一元件僅在 x 軸方向有正應力 σ_x

則其應力 Mohr 圓如下：



在 x 軸方向的應變量為 ε_x，在 y 軸方向的應變量為

$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$ 。其 Mohr 圓如下：



在由 x 軸逆時針方向旋轉 $\pi/4$ 的主平面方向，

$$\tau_{xy} = \sigma_x/2$$

$$\gamma_{xy} = (1+\nu)\varepsilon_x$$

又 $\sigma_x = E\varepsilon_x$，$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

$$\therefore G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

五、應變量測

元件的應變常用應變規量測。應變規是利用其導線在受力伸長或縮短時斷面積改變而產生電阻變化的原理作為應變的量測。因應變規僅能量測線應變，角應變必須依靠應變轉換來計算。
若有三個應變規與 x 軸之夾角分別為 θ_1、θ_2 與 θ_3，則可得下列三聯立方程式用以計算 σ_x、σ_y 與 τ_{xy}。

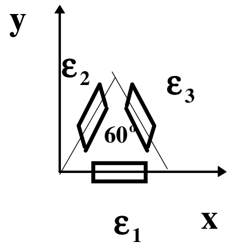
$$\varepsilon(\theta_1)=\varepsilon_x \cos^2\theta_1+\gamma_{xy}\sin\theta_1\cos\theta_1 +\varepsilon_y \sin^2\theta_1$$

$$\varepsilon(\theta_2)=\varepsilon_x \cos^2\theta_2+\gamma_{xy}\sin\theta_2\cos\theta_2 +\varepsilon_y \sin^2\theta_2$$

$$\varepsilon(\theta_3)=\varepsilon_x \cos^2\theta_3+\gamma_{xy}\sin\theta_3\cos\theta_3 +\varepsilon_y \sin^2\theta_3$$

【例題】

有一應變規排列如下圖，其應變值分別為 ε_1、ε_2 與 ε_3，試將其改成 ε_x、ε_y 與 γ_{xy}。



$$\varepsilon_1=\varepsilon_x \cos^2 0^o+\gamma_{xy}\sin 0^o\cos 0^o +\varepsilon_y \sin^2 0^o$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_x \cos^2 60^o+\gamma_{xy}\sin 60^o\cos 60^o +\varepsilon_y \sin^2 60^o$$

$$\varepsilon_3=\varepsilon_x \cos^2 120^o+\gamma_{xy}\sin 120^o\cos 120^o +\varepsilon_y \sin^2 120^o$$

代入得：

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy}$$

解得：

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}\left[2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \varepsilon_1\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

六、虎克定律通式

（一）虎克定律

一均質、均向的彈性體在比率限內變形時

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha(T - T_0)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha(T - T_0)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha(T - T_0)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};\quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

若 $T = T_0$ 可用矩陣表示成

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z\end{bmatrix}$$

定義

$$\Delta \equiv \frac{1}{E}\begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+\nu)^2(1-2\nu)\big/E$$

解聯立方程式得：

$$\sigma_x = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_x & -\nu & -\nu \\ \varepsilon_y & 1 & -\nu \\ \varepsilon_z & -\nu & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

所以

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right]$$

若再定義 Lame's const.

$$\lambda \equiv \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

可整理成：

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-\nu}{\nu} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1-\nu}{\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

【特例】平面應力 $\sigma_z = 0$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

上述矩陣退化為：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

而

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

（二）體積模數(Bulk Modulus)

體積變率：

$$e \equiv \frac{\Delta V}{V}$$

其中 e: dilation 膨脹（率）

V：volume 體積

$$e = \left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1\right] / 1$$

$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$= \left[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right] / E$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

若一方塊或圓球在水中受一均勻的水壓 P

$$e = -\frac{3P(1-2\nu)}{E}$$

定義體積模數 κ

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

則

$$e = -\frac{P}{\kappa}$$

（三）Poisson's Ratio 的極值

$\because e = -\dfrac{P}{\kappa}$

若壓力施於物體上則其體積減小；

若$P > 0$;則$e < 0 \Rightarrow \kappa > 0$

$\therefore \dfrac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \Rightarrow 1-2\nu > 0$

因 $\nu \geq 0$；所以

$0 \leq \nu \leq 1/2$

當 $\nu = 1/2$ 時；

$\kappa \to \infty; e \to 0$ 為不可壓縮物體。

當 $\nu = 0$ 時；軸向應力時無側向應變；

為一理想的材料。

一般工程材料 $1/4 \leq \nu \leq 1/3$；鋼材約為 $\nu = 0.3$ 。