第七章　靜不定樑

一、前言
二、負荷微分方程式
三、重疊法
四、複合靜不定樑

一、前言

（一）定義

樑的反力單靠靜力平衡無法求得者稱為靜不定樑(static indeterminate beam)。靜不定樑的反力必需輔助以位移關係才能求得。

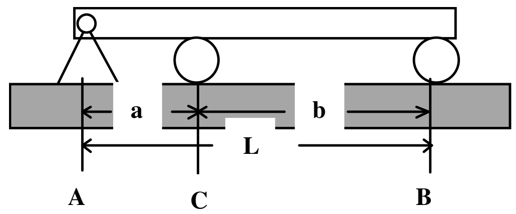
靜不定樑必須先求出反力，才能繼續計算其他問題，如：內力分佈、位移等。

(二)常見的靜不定樑

1. 連續樑：(continuous beams)

若將簡支樑或外伸樑支撐點增加則成連續樑。

例如：

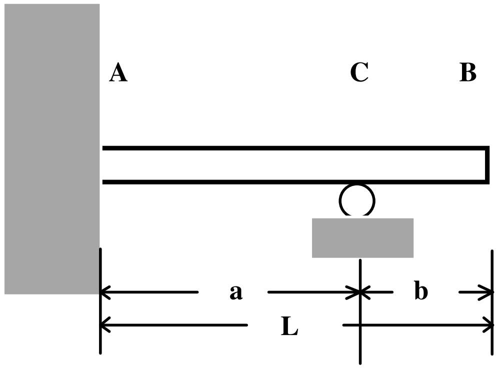


2. 固定樑

若將懸臂樑的自由端增加支撐則成固定樑。

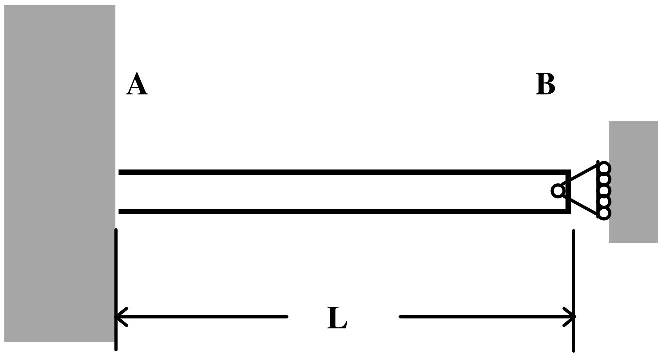
例如：

C 點的位移為零。



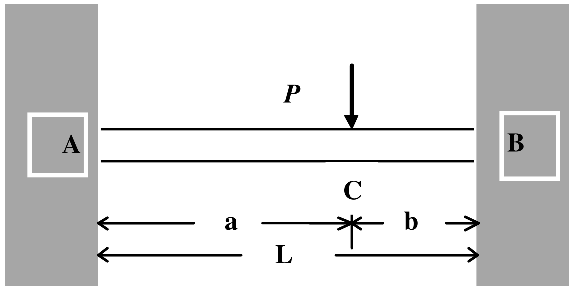
例如：

C 點的斜率為零。



例如：

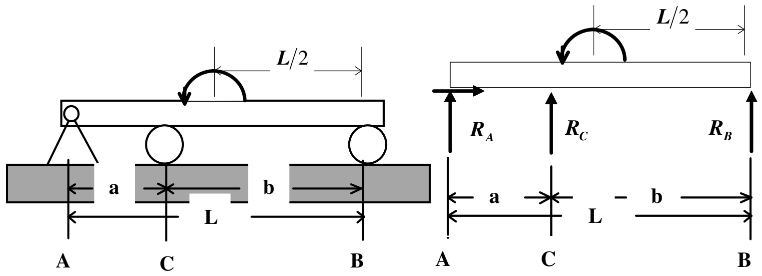
C 點的位移與斜率都為零。



二、負荷微分方程式

利用負荷微分方程式求靜不定樑的反力時，將多出的固定點設為贅力。因此放鬆結構成為靜定樑，再以此寫出負荷微分方程式。固定點設為贅力處的位移則成為輔助邊界條件。

《例題》負荷為彎矩的連續樑



$$EIy'''' = q(x) + R_C\langle x-a\rangle_{-1}$$

$$= M_0\langle x-L/2\rangle_{-2} + R_C\langle x-a\rangle_{-1}$$

其邊界條件為

$$y''(0)=0 \qquad y''(L)=0$$

$$y(0)=0 \qquad y(L)=0$$

輔助邊界條件

$$y(a)=0$$

積分得

$$EIy''' = -V$$

$$= -M_0\left\langle x - L/2\right\rangle_{-1}$$

$$+ R_C\left\langle x - a\right\rangle^0 + c_1$$

再積分得

$$EIy'' = M$$

$$= -M_0\left\langle x - L/2\right\rangle^0$$

$$+ R_C\left\langle x - a\right\rangle^1 + c_1 x + c_2$$

再積分得

$$EIy' = -M_0\left\langle x - L/2\right\rangle^1 + \frac{1}{2}R_C\left\langle x - a\right\rangle^2$$

$$+ \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

再積分得

$$EIy = -\frac{1}{2}M_0\left\langle x - L/2\right\rangle^2 + \frac{1}{6}R_C\left\langle x - a\right\rangle^3$$

$$+ \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

求積分常數

$$y''(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y''(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{M_0}{L} - R_C\frac{b}{L}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_3 = \frac{1}{8}M_0 L - \frac{1}{6}R_C\frac{b^3}{L}$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{M_0}{L} - R_C\frac{b}{L}\right)L^2$$

$$c_3 = -\frac{1}{24}M_0 L + \frac{1}{6}R_C ab\left(1 + b/L\right)$$

$$y(a) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6} c_1 a^2 + c_3 = 0$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{M_0}{L} - R_C \frac{b}{L}\right) a^2$$

$$-\frac{1}{24} M_0 L + \frac{1}{6} R_C ab\left(1 + b/L\right) = 0$$

$$R_C = \frac{1}{8} \frac{M_0}{L} \frac{\left(1 - 4a^2/L^2\right)}{ab^2/L^3}$$

$$c_1 = -\frac{1}{8} \frac{M_0}{L} \frac{\left(1 - 4a^2/L^2 - 8ab/L^2\right)}{ab/L^2}$$

$$c_3 = -\frac{1}{24} M_0 L$$

$$+\frac{1}{48} M_0 L \frac{\left(1 + b/L\right)\left(1 - 4a^2/L^2\right)}{b/L}$$

$$EIy = -\frac{1}{2} M_0 \left\langle x - L/2 \right\rangle^2$$

$$+\frac{1}{6} R_C \left\langle x - a \right\rangle^3 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_3 x$$

$$R_A = -V(0) = c_1$$

$$= -\frac{1}{8} \frac{M_0}{L} \frac{\left(1 - 4a^2/L^2 - 8ab/L^2\right)}{ab/L^2}$$

$$R_B = V(L)$$

$$= M_0 \left\langle L - L/2 \right\rangle_{-1} - R_C \left\langle L - a \right\rangle^0 - c_1$$

$$= -R_C - R_A$$

【特例】

$$x = \frac{L}{2}$$

$$R_C = 0$$

$$R_A = \frac{M_0}{L}$$

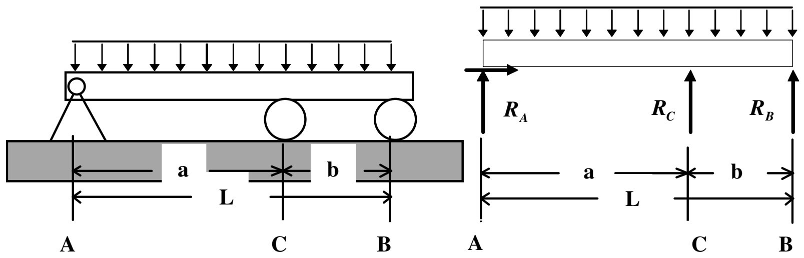
$$R_B = -\frac{M_0}{L}$$

$$EIy = -\frac{1}{2}M_0\left\langle x - L/2 \right\rangle^2 + \frac{1}{6}\frac{M_0}{L}x^3 - \frac{1}{24}M_0 L x$$

在樑的中央：

$$y\left(L/2\right) = 0$$

《例題》連續負荷的連續樑



$$EIy'''' = q\left(x\right) + R_C\left\langle x - a \right\rangle_{-1}$$
$$= -q_0 + R_C\left\langle x - a \right\rangle_{-1}$$

其邊界條件為

$$y''\left(0\right) = 0 \qquad y''\left(L\right) = 0$$

$$y\left(0\right) = 0 \qquad y\left(L\right) = 0$$

輔助邊界條件：

$$y\left(a\right) = 0$$

積分得

$$EIy''' = -V$$

$$= -q_0 x + R_C \left\langle x-a \right\rangle^0 + c_1$$

再積分得

$$EIy'' = M$$

$$= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + R_C \left\langle x-a \right\rangle^1$$

$$+ c_1 x + c_2$$

再積分得

$$EIy' = -\frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} R_C \left\langle x-a \right\rangle^2$$

$$+ \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

再積分得

$$EIy = -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} R_C \left\langle x-a \right\rangle^3$$

$$+ \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

求積分常數

$$y''(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y''(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1}{2} q_0 L - R_C \frac{b}{L}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_3 = \frac{1}{24} q_0 L^3 - \frac{1}{6} R_C \frac{b^3}{L}$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} q_0 L - R_C \frac{b}{L}\right) L^2$$

$$c_3 = -\frac{1}{24} q_0 L^3 + \frac{1}{6} R_C ab(1 + b/L)$$

$$y(a) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{24} q_0 a^3 + \frac{1}{6} c_1 a^2 + c_3 = 0$$

$$-\frac{1}{24}q_0a^3+\frac{1}{12}q_0a^2L-\frac{1}{6}\frac{R_C}{L}a^2b$$

$$-\frac{1}{24}q_0L^3-\frac{1}{6}\frac{R_C}{L}\left(b^3-bL^2\right)=0$$

$$R_C=\frac{1}{8}q_0L\frac{\left(1-2a^2/L^2+a^3/L^3\right)}{ab^2/L^3}$$

$$c_1=-\frac{1}{8}q_0L\frac{\left(1-2a^2/L^2-4ab/L^2+a^3/L^3\right)}{ab/L^2}$$

$$c_3=-\frac{1}{24}q_0L^3$$

$$+\frac{1}{48}q_0L^3\frac{\left(1+b/L\right)\left(1-2a^2/L^2+a^3/L^3\right)}{b/L}$$

得變形曲線方程式與反力：

$$EIy=-\frac{1}{24}q_0x^4+\frac{1}{6}R_C\left\langle x-a\right\rangle^3$$

$$+\frac{1}{6}c_1x^3+c_3x$$

$$R_A=-V\left(0\right)=c_1$$

$$=-\frac{1}{8}q_0L\frac{\left(1-2a^2/L^2-4ab/L^2+a^3/L^3\right)}{ab/L^2}$$

$$R_B=V\left(L\right)$$

$$=q_0L-R_C\left\langle L-a\right\rangle^0-c_1$$

$$=q_0L-R_C-R_A$$

【特例】

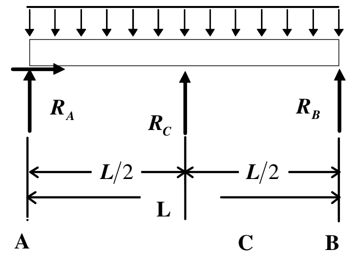
$$x = \frac{L}{2}$$

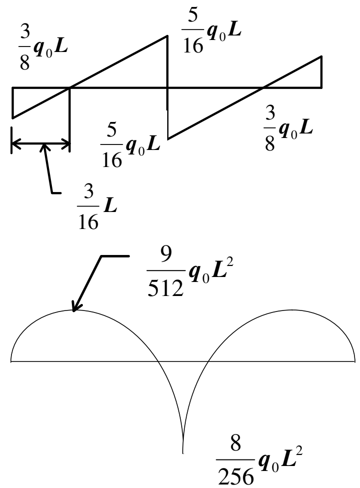
$$R_C = \frac{5}{8} q_0 L$$

$$R_A = \frac{3}{16} q_0 L$$

$$R_B = \frac{3}{16} q_0 L$$

$$EIy = -\frac{q_0 x}{384}\left(L^3 - 12Lx^2 + 16x^3\right) + \frac{5}{48} q_0 L \langle x - a \rangle^3$$



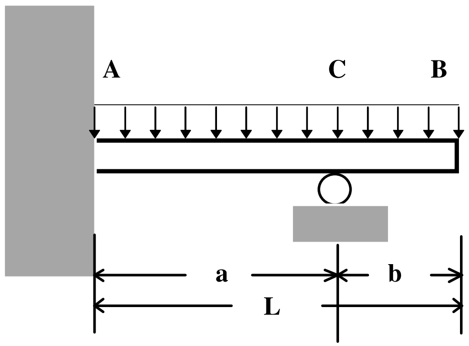


【思考】

若 C 點不與 A、B 兩點同在一直線上，結果將如何？

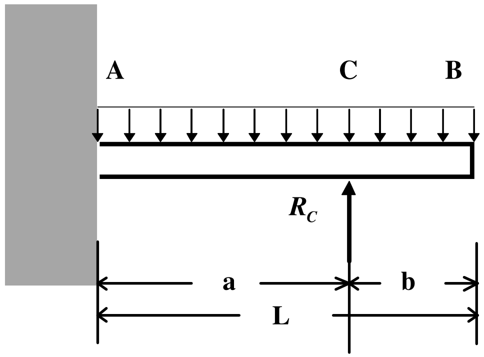
《例題》有一位移固定點的固定樑

求下列靜不定樑的反力與彈性曲線方程式。



此題為有三個未知反力的靜不定樑；

取 C 點的反力 $\boldsymbol{R_C}$ 為贅力，以形成下列之放鬆結構。



放鬆結構為靜定的懸臂樑，其負荷方程式為

$$EIy'''' = -q_0 + R_C\langle x-a\rangle_{-1}$$

其邊界條件包括懸臂樑應有的四個邊界條件與贅力所需的一個輔助條件。

邊界條件如下：

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=0\\ y'(0)&=0\\ y''(L)&=0\\ y'''(L)&=0 \end{aligned}\right\}\text{懸臂樑的邊界條件}$$

$$\left.y(a)=0\right\}C\text{點的輔助條件}$$

【思考】

若 C 點與 B 點重合時邊界條件要如何表示？

積分得剪力方程式

$$EIy''' = -V$$

$$= -q_0 x + R_C \langle x-a \rangle^0 + c_1$$

再積分得彎矩方程式

$$EIy'' = M$$

$$= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + R_C \langle x-a \rangle^1 + c_1 x + c_2$$

再積分得斜率方程式

$$EIy' = -\frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} R_C \langle x-a \rangle^2 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

再積分得位移方程式

$$EIy = -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} R_C \langle x-a \rangle^3 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

代入邊界條件求C_1, C_2, C_3, C_4, R_C：

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$y'''(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = q_0 L - R_C$$

$$y''(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} q_0 L^2 + R_C a$$

$$EIy(a) = -\frac{1}{24} q_0 a^4 + \frac{1}{6}(q_0 L - R_C) a^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} q_0 L^2 + R_C a\right) a^2 = 0$$

$$R_C = \frac{1}{8} q_0 L \frac{\left(6 - 4a/L + a^2/L^2\right)}{a/L}$$

將 R_C 代入 C_1, C_2

$$c_1 = -\frac{1}{8} q_0 L \frac{\left(6 - 12a/L + a^2/L^2\right)}{a/L}$$

$$c_2 = \frac{1}{8} q_0 L^2 \left(2 - 4a/L + a^2/L^2\right)$$

將 C_1, C_2, C_3, C_4, R_C 代入位移方程式

$$EIy = -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} R_C \left\langle x - a \right\rangle^3 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2$$

代入剪力方程式求 A 點的反力

$$R_A = -V(0) = c_1 = -\frac{1}{8} q_0 L \frac{\left(6 - 12a/L + a^2/L^2\right)}{a/L}$$

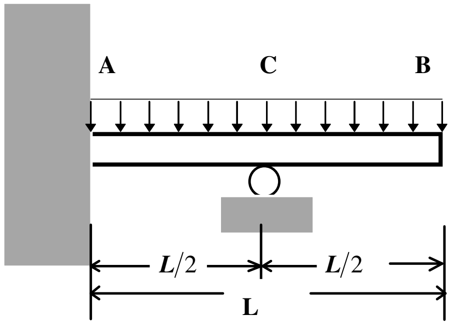
代入彎矩方程式求 A 點的反力矩

$$M_A = -M(0) = -c_2 = -\frac{1}{8} q_0 L^2 \left(2 - 4a/L + a^2/L^2\right)$$

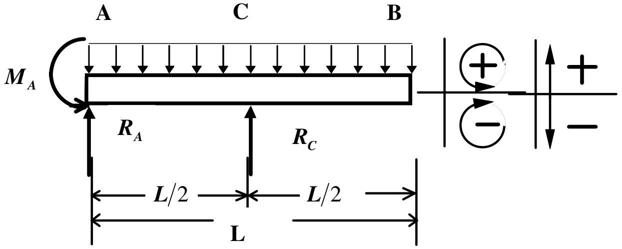
【特例】

C點在樑的中央

$$a = \frac{L}{2}$$



靜力平衡圖



$$R_C = \frac{17}{16} q_0 L$$

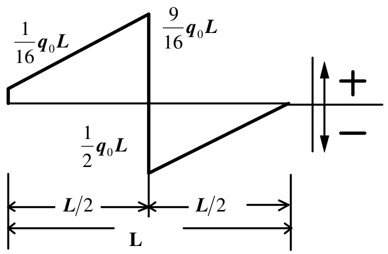
$$R_A = -V(0) = c_1$$

$$= -\frac{1}{16} q_0 L$$

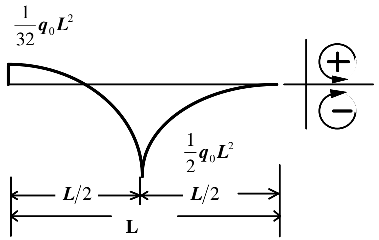
$$M_A = -M(0) = -c_2$$

$$= -\frac{1}{32} q_0 L^2$$

剪力分佈圖



彎矩分佈圖



彈性曲線

$$EIy=-\frac{1}{24}q_0x^4+\frac{17}{96}q_0L\langle x-L/2\rangle^3$$

$$-\frac{1}{96}q_0Lx^3+\frac{1}{64}q_0L^2x^2$$

$$y=\frac{q_0L^4}{192EI}\left(3x^2/L^2-2x^3/L^3-8x^4/L^4\right)$$

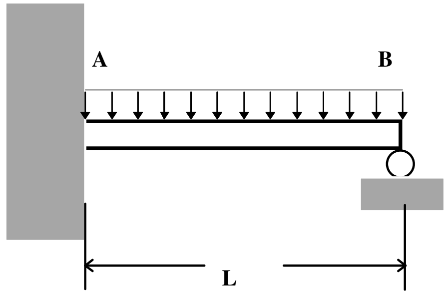
$$+\frac{17q_0L^4}{96EI}\langle x/L-1/2\rangle^3$$

$$y(L)=-\frac{11q_0L^4}{768EI}$$

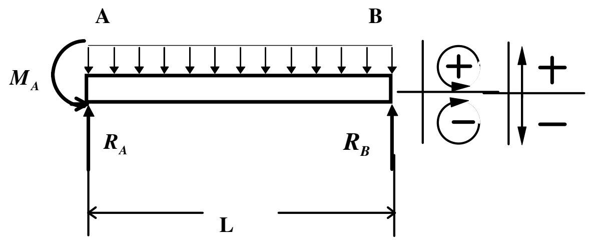
$$y(L/4)=\frac{q_0L^4}{1536EI}$$

【特例】

$a=L$



靜力平衡圖



$$R_C=\frac{3}{8}q_0L$$

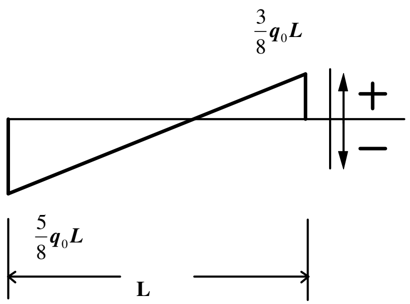
$$R_A=-V(0)=c_1$$

$$=\frac{5}{8}q_0L$$

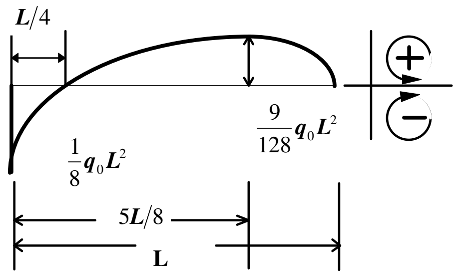
$$M_A=-M(0)=-c_2$$

$$=\frac{1}{8}q_0L^2$$

剪力分佈圖



彎矩分佈圖



$$y = \frac{q_0L^4}{48EI}\left(-3x^2/L^2 - 5x^3/L^3 - 2x^4/L^4\right)$$

$$y' = \frac{q_0L^3}{48EI}\left(-6x/L + 15x^2/L^2 - 8x^3/L^3\right)$$

最大位移發生於 $y' = 0$

即

$-6x/L + 15x^2/L^2 - 8x^3/L^3 = 0$

$\therefore x = 0 \leftarrow$ 端點

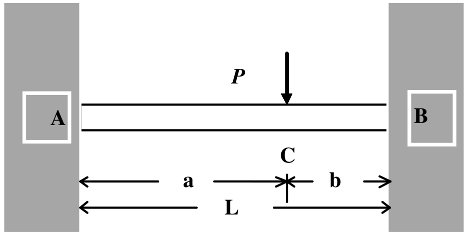
$0.578L$

$1.297L \leftarrow$ 不合理

$$y_{max} = y(0.578L) = -0.26\frac{q_0L^4}{48EI}$$

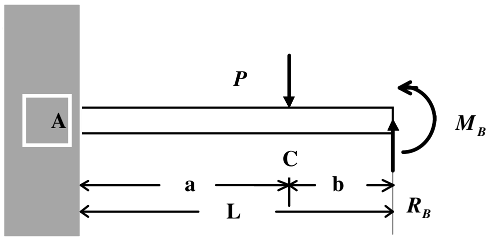
《例題》兩端固定的固定樑

求下列靜不定樑的反力與彈性曲線方程式。



不計水平力此題為有四個未知反力的靜不定樑；

取 B 點的反力與反力矩 R_B, M_B 為贅力，以形成下列之放鬆結構。



放鬆結構為靜定的懸臂樑，其負荷方程式為

$$EIy'''' = -P\langle x-a\rangle_{-1} + R_B\langle x-L\rangle_{-1} + M_B\langle x-L\rangle_{-2}$$

其邊界條件包括懸臂樑應有的四個邊界條件與贅力所需的一個輔助條件。

邊界條件如下：

邊界條件如下：

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y(L)=0 \\ y''(L)=0 \end{array}\right\} \text{懸臂樑的邊界條件}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(L)=0 \\ y(L)=0 \end{array}\right\} B\text{點的輔助條件}$$

積分得剪力方程式

$$EIy''' = -P\left\langle x-a\right\rangle^{0} + R_B\left\langle x-L\right\rangle^{0}$$

$$-M_B\left\langle x-L\right\rangle_{-1} + c_1$$

再積分得彎矩方程式

$$EIy'' = -P\left\langle x-a\right\rangle^{1} + R_B\left\langle x-L\right\rangle^{1}$$

$$-M_B\left\langle x-L\right\rangle^{0} + c_1 x + c_2$$

再積分得斜率方程式

$$EIy' = -\frac{1}{2}P\left\langle x-a\right\rangle^{2} + \frac{1}{2}R_B\left\langle x-L\right\rangle^{2}$$

$$-M_B\left\langle x-L\right\rangle^{1}$$

$$+\frac{1}{2}c_1 x^{2} + c_2 x + c_3$$

再積分得位移方程式

$$EIy = -\frac{1}{6}P\left\langle x-a\right\rangle^{3} + \frac{1}{6}R_B\left\langle x-L\right\rangle^{3}$$

$$-\frac{1}{2}M_B\left\langle x-L\right\rangle^{2}$$

$$+\frac{1}{6}c_1 x^{3} + \frac{1}{2}c_2 x^{2} + c_3 x + c_4$$

代入邊界條件求$C_1, C_2, C_3, C_4, R_B, M_B$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$EIy'''(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = P - R_B$$

$$EIy''(L) = 0 \Rightarrow$$

$$c_2 = M_B + R_B L - Pa$$

$$y'(L)=0\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}P(L-a)^2+\frac{1}{2}(P-R_B)L^2$$

$$+(M_B+R_BL-Pa)L=0$$

$$2\frac{M_B}{L}+R_B=P\left(b^2/L^2+2a/L-1\right)$$

$$y(0)=0\Rightarrow$$

$$0=-\frac{1}{6}P(L-a)^3$$

$$+\frac{1}{6}(P-R_B)L^3$$

$$+\frac{1}{2}(M_B+R_BL-Pa)L^2$$

$$3\frac{M_B}{L}+2R_B=P\left(b^3/L^3+3a/L-1\right)\quad M_B=-P\frac{a^2b}{L^2}$$

$$R_B=P\frac{a^2}{L^2}(1+2b/L)$$

將 R_B, M_B 代入 C_1, C_2

$$c_1=P\frac{b^2}{L^2}(1+2a/L)$$

$$c_2=-\frac{Pab^2}{L^2}$$

將 C_1, C_2, C_3, C_4, R_C 代入位移方程式

$$EIy=-\frac{1}{6}P\langle x-a\rangle^3$$

$$+\frac{1}{6}P\frac{b^2}{L^2}(1+2a/L)x^3$$

$$-\frac{1}{2}\frac{Pab^2}{L^2}x^2$$

代入剪力方程式求 A 點的反力

$$R_A = -V = EIy'(0) = c_1$$

$$= P\frac{b^2}{L^2}(1+2a/L)$$

代入彎矩方程式求 A 點的反力矩

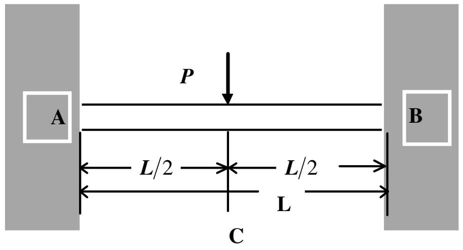
$$M_A = -M(0) = -EIy''(0) = -c_2$$

$$= \frac{Pab^2}{L^2}$$

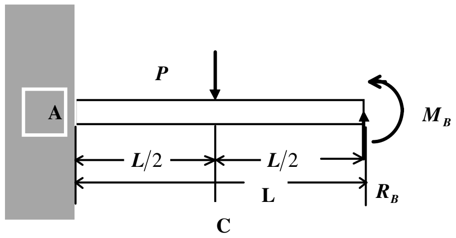
【特例】

C 點在樑的中央

$$a = \frac{L}{2}$$



靜力平衡圖



$$R_B = \frac{1}{2}P$$

$$R_A = -V(0) = c_1$$

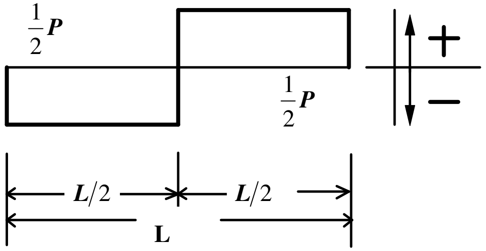
$$= \frac{1}{2}P$$

$$M_A = -M(0) = -c_2$$

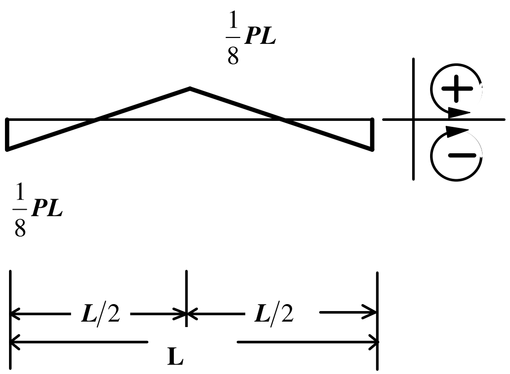
$$= \frac{1}{8}PL$$

$$M_B = -\frac{1}{8}PL$$

剪力分佈圖



彎矩分佈圖

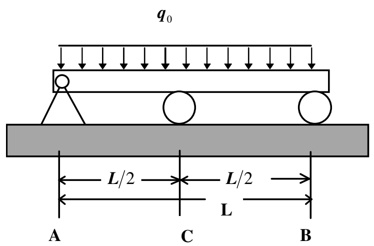


三、重疊法

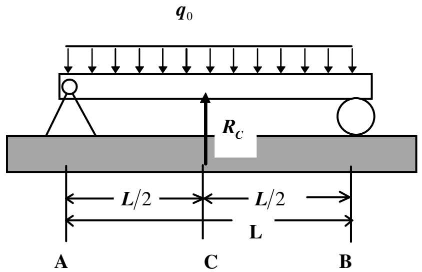
利用重疊求靜不定樑的反力時，將多出的固定點設為贅力。因此放鬆結構成為靜定樑，再求各外力（包括贅力）在放鬆點所產生的位移。總和這些位移以滿足放鬆點的位移要求，求得贅力。

《例題》連續負荷的連續樑

用重疊法求下列連續樑的反力。

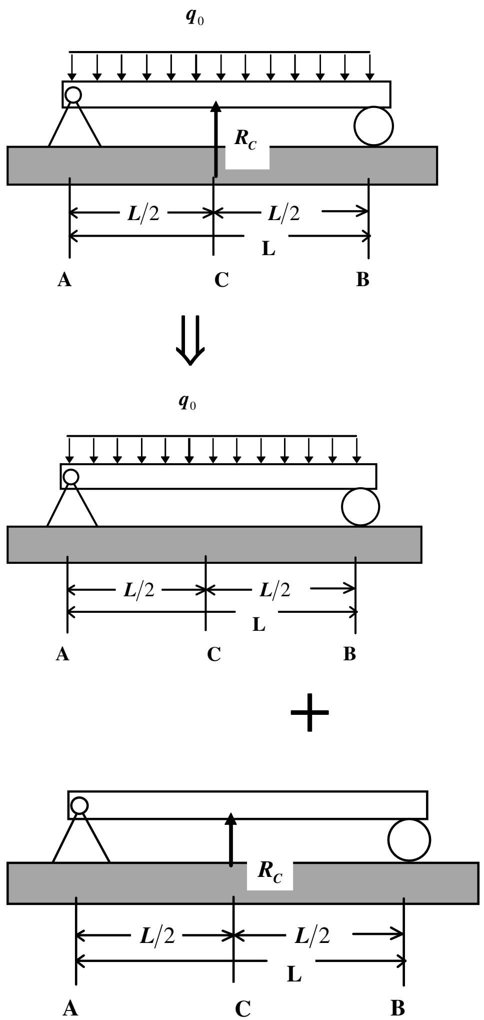


取 B 點的反力為贅力，形成下列放鬆結構;



本題依負荷形式可分成均勻的分佈負荷與集中負荷的兩個簡支樑。

因為是有三個未知數的靜不定問題，必須有一個位移的限制條件，即在 C 點位移為零。



C點由分佈負荷產生的位移：

$$\delta_{C_1} = -\frac{5}{384}\frac{q_0 L^4}{EI}$$

C點由集中負荷 R_C 產生的位移：

$$\delta_{C_2} = \frac{1}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta_C = \delta_{C_1} + \delta_{C_2} = 0$$

$$-\frac{5}{384}\frac{q_0 L^4}{EI} + \frac{1}{48}\frac{PL^3}{EI} = 0$$

$$R_C = \frac{5}{8} q_0 L$$

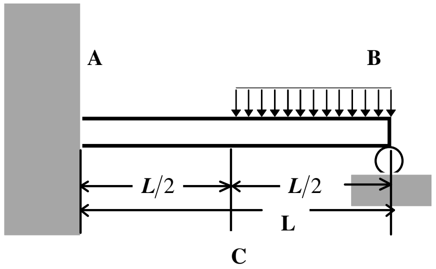
再由靜力平衡求得

$$R_A = \frac{3}{16} q_0 L$$

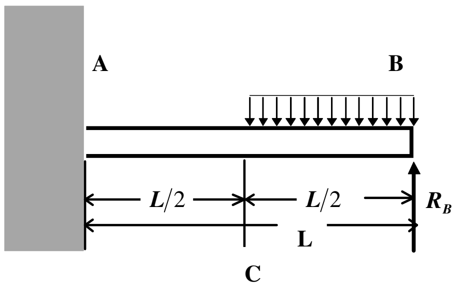
$$R_B = \frac{3}{16} q_0 L$$

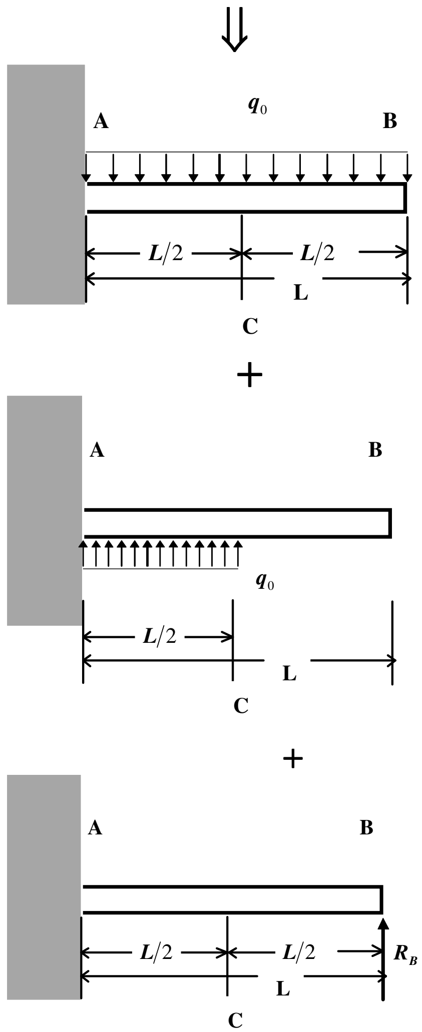
《例題》部份連續負荷的固定樑

用重疊法求下列固定樑的反力。



取 B 點的反力為贅力，形成下列放鬆結構;





本題依負荷形式可分成兩個均勻的分佈負荷與一個集中負荷的三個懸臂樑。

因為是有三個未知數的靜不定問題，必須有一個位移的限制條件，即在 B 點位移為零。

【解】

B 點由向下的均勻分佈產生的位移

$$\delta_{B_1} = -\frac{1}{8}\frac{q_0 L^4}{EI}$$

向上的均勻分佈產生的位移

C 點的斜率與位移

$$\theta_C = \frac{1}{6}\frac{q_0 (L/2)^3}{EI}$$

$$= \frac{1}{48}\frac{q_0 L^3}{EI}$$

$$\delta_C = \frac{1}{8}\frac{q_0 (L/2)^4}{EI}$$

$$= \frac{1}{128}\frac{q_0 L^4}{EI}$$

延伸到 B 點的位移

$$\delta_{B_2} = \overbrace{\frac{1}{128}\frac{q_0 L^4}{EI}}^{C\text{點的位移}}$$

$$+ \overbrace{\left(\frac{1}{48}\frac{q_0 L^3}{EI}\cdot\frac{L}{2}\right)}^{BC\text{延線的位移}}$$

$$= \frac{7}{384}\frac{q_0 L^4}{EI}$$

B 點由集中負荷產生的位移

$$\delta_{B_3} = \frac{1}{3}\frac{R_B L^3}{EI}$$

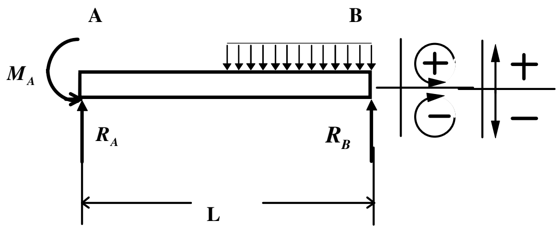
B 點的位移為零

$$\delta_B = \delta_{B_1} + \delta_{B_2} + \delta_{B_3} = 0$$

$$-\frac{1}{8}\frac{q_0 L^4}{EI} + \frac{7}{384}\frac{q_0 L^4}{EI} + \frac{1}{3}\frac{R_B L^3}{EI} = 0$$

$$\therefore R_B = \frac{41}{128} q_0 L$$

由靜力平衡圖



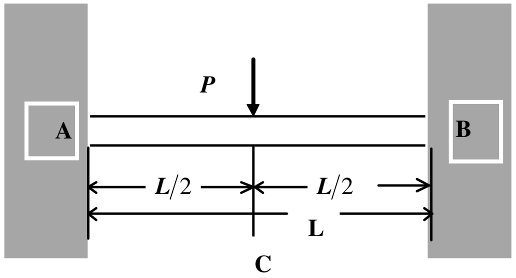
$$R_A = \frac{23}{128} q_0 L$$

$$M_A = \frac{3}{4}\frac{1}{2} q_0 L - \frac{41}{128} q_0 L$$

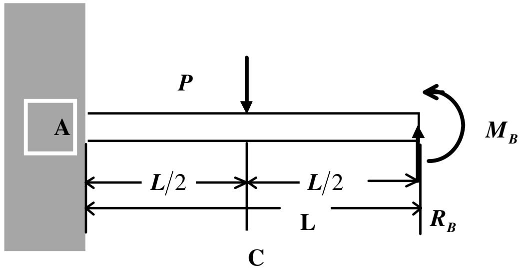
$$= \frac{7}{128} q_0 L$$

《例題》固定樑

用重疊法求下列固定樑的反力。



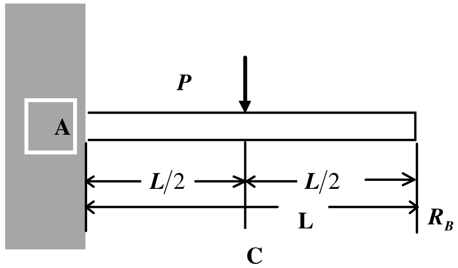
取 B 點的反力與反力矩為贅力，形成下列放鬆結構；



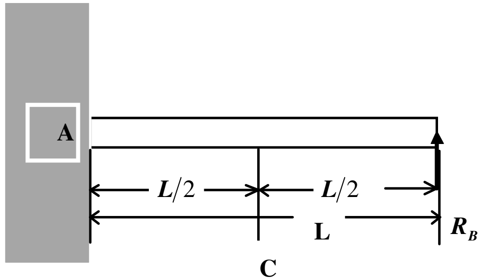
本題依負荷形式可分成在 C 點的集中負荷與在 B 點的集中負荷力與力矩的三個懸臂樑。

因為是有四個未知數的靜不定問題，必須有兩個位移的限制條件，即在 B 點斜率與位移為零。

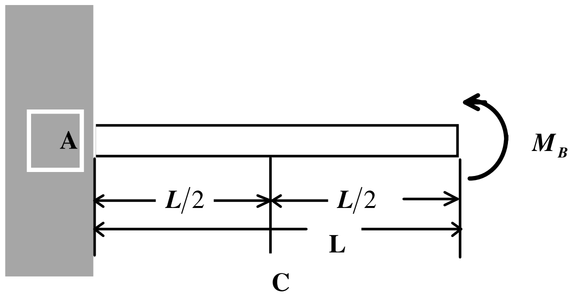
⇓



+



+



B 點由 C 點負荷產生的位移

C 點的斜率與位移

$$\theta_C = -\frac{1}{2}\frac{P\left(L/2\right)^2}{EI}$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{PL^2}{EI}$$

$$\delta_C = -\frac{1}{3}\frac{P\left(L/2\right)^3}{EI}$$

$$= -\frac{1}{24}\frac{PL^3}{EI}$$

延伸到 B 點的斜率

$$\theta_{B_1} = \theta_C$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{PL^2}{EI}$$

延伸到 B 點的位移

$$\delta_{B_1} = \overbrace{-\frac{1}{24}\frac{PL^3}{EI}}^{C\text{點的位移}}$$

$$+\overbrace{\left(-\frac{1}{8}\frac{PL^2}{EI}\cdot\frac{L}{2}\right)}^{BC\text{延線的位移}}$$

$$= -\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

B 點由集中負荷產生的斜率與位移

$$\theta_{B_2} = \frac{1}{2}\frac{R_B L^2}{EI}$$

$$\delta_{B_2} = \frac{1}{3}\frac{R_B L^3}{EI}$$

B 點由集中彎矩產生的斜率與位移

$$\theta_{B_3} = \frac{M_B L}{EI}$$

$$\delta_{B_3} = \frac{1}{2}\frac{M_B L^2}{EI}$$

B 點的斜率為零

$$\theta_B = \theta_{B_1} + \theta_{B_2} + \theta_{B_3} = 0$$

$$-\frac{1}{8}\frac{PL^2}{EI} + \frac{1}{2}\frac{R_B L^2}{EI} + \frac{M_B L}{EI} = 0$$

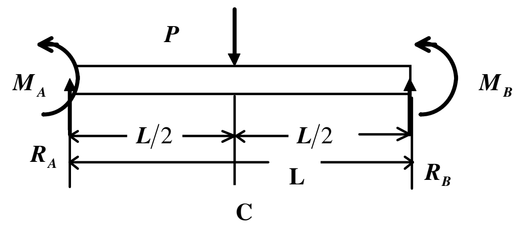
B 點的位移為零

聯立解得：

$$R_B = \frac{1}{2}P$$

$$M_B = -\frac{1}{8}PL$$

由靜力平衡圖得



$$R_A = \frac{1}{2}P$$

$$M_A = \frac{1}{8}PL$$

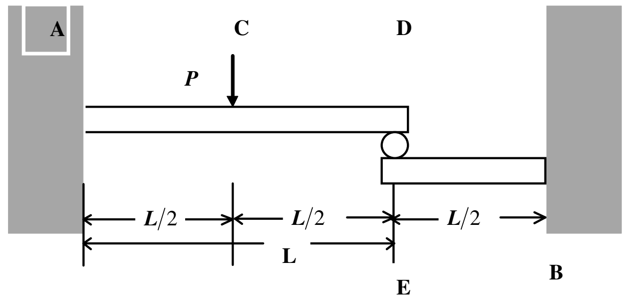
四、複合樑

複合樑不一定是靜不定樑。

靜不定複合樑常利用重疊法求反力。

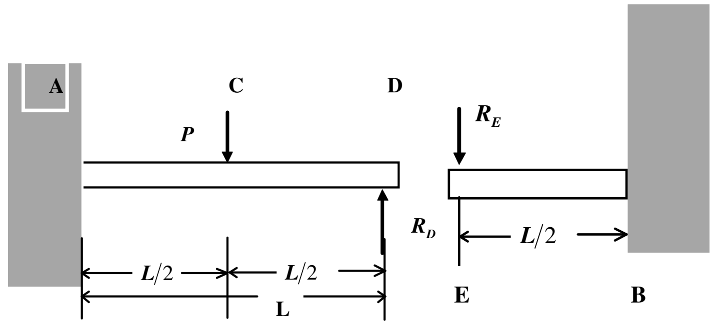
《例題》懸臂樑組成的複合樑

用重疊法求下列固定樑的反力。



兩懸臂樑 AD 與 BE，在 D 與 E 點以銷連接而成靜不定結構。

將結構分解為兩個懸臂樑



銷連結的特性：

接點反力的向量和為作用於該點的外力

$$\Rightarrow R_D = R_E = R_P$$

接點在變形時保持接觸

$$\Rightarrow \delta_D = \delta_E$$

懸臂樑 ACD，D 點的位移包括：

（1）外力 P 產生的位移

$$\delta_{D_1} = \overbrace{-\frac{P(L/2)^3}{3EI}}^{C\text{點的位移}}$$

$$+\overbrace{\left(-\frac{P(L/2)^2}{2EI}\cdot\frac{L}{2}\right)}^{CD\text{延伸的位移}}$$

$$= -\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

(2) R_D 產生的位移

$$\delta_{D_2} = \frac{1}{3}\frac{R_D L^3}{EI} = \frac{1}{3}\frac{R_p L^3}{EI}$$

$$\delta_D = \delta_{D_1} + \delta_{D_2}$$

$$= -\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI} + \frac{1}{3}\frac{R_P L^3}{EI}$$

懸臂樑 BE，E 點的位移：

$$\delta_E = -\frac{1}{3}\frac{R_E(L/2)^3}{EI}$$

$$= -\frac{1}{24}\frac{R_P L^3}{EI}$$

利用位移關係求 R_P

$$\delta_D = \delta_E$$

$$-\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI} + \frac{1}{3}\frac{R_P L^3}{EI} = \frac{1}{24}\frac{R_P L^3}{EI}$$

$$R_P = \frac{5}{14}P$$