第六章　靜定樑的位移

一、前言

(一)　撓曲曲線

樑在受側向負荷時會產生變形(deformation)；更精確稱為撓曲變形(deflection)。因此會有垂直方向的位移(displacement)。樑變形後的曲線稱為撓曲曲線(deflection curves)或彈性曲線(elastic curves)。

(二)各種元件的變形曲線

單元	軸向力元件	軸（扭轉元件）	樑（側向力元件）
斷面內力	正向力;貳：二(一)	扭矩; 參：一	彎矩；肆：二、四、 剪力　　五
應變	正應變;貳 三：(一)	剪應變；參：一	正應變；伍：一
應力	張(壓)應力; 貳：二(二)	扭剪應力參：二	斷面正應力；伍：二 斷面剪應力；伍：四
變形	伸長量;貳：三(二)	扭轉角參：三	位移；陸
靜不定元件	貳：四	參：四	柒

二、雙重積分公式

(一)公式由來

由上一章得到撓曲時的曲率半徑

$$\therefore \frac{1}{\rho} = \kappa \cong \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

又從撓曲角公式得知

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

所以

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}$$

在許多教科書上都記為

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M \quad 或$$

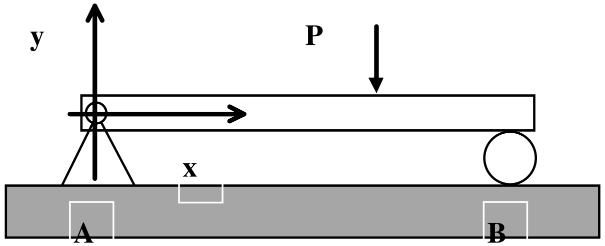
$$EIy'' = M$$

將此一公式經過兩次積分即可得到撓曲曲線，故此公式稱連續(雙重)積分公式

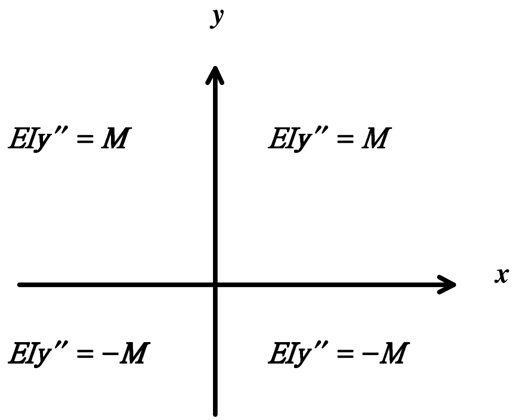
(successive integration equations)。

座標與符號規則

在講義中樑的座標都採用第一象限，且原點都在樑的左端。



若使用不同的座標系統公式的正負號將有不同。



（二）雙重積分

若 EI 為常數積分

$$EIy'' = M$$

得

$$EIy' = \int M dx + c_1$$

因為 $$y' = \frac{dy}{dx} \approx \tan\theta \approx \theta$$

y' 為彈性曲線的斜率，

亦即切線與水平線的夾角。

再度積分得

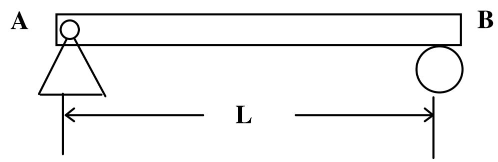
$$EIy = \int\int M dx + c_1 x + c_2$$

所得函數 y 即為撓曲曲線方程式或稱位移方程式。

(三)邊界條件

雙重積分公式有兩個常數，必須有兩個邊界條件；靜定樑的邊界條件如下

1. 簡支樑

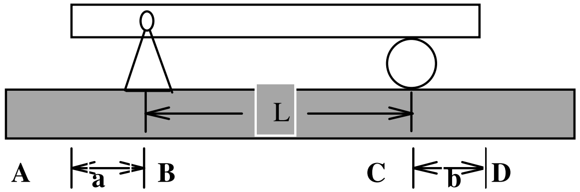


撓曲時

在 A 點無位移 $y(0) = 0$

在 B 點無位移 $y(L) = 0$

2. 外伸樑

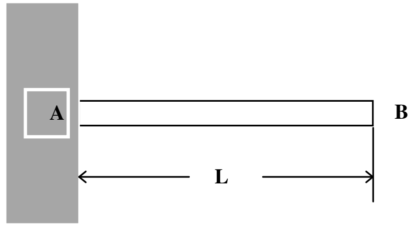


撓曲時

在 B 點位移為 0　$y(a)=0$

在 C 點位移為 0　$y(a+L)=0$

3. 懸臂樑



撓曲時

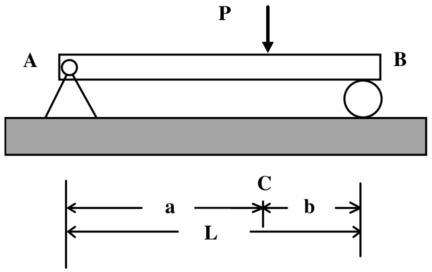
在 A 點斜率為 0　$y'(0)=0$

在 A 點無位移　$y(0)=0$

（四）簡支樑的撓曲曲線

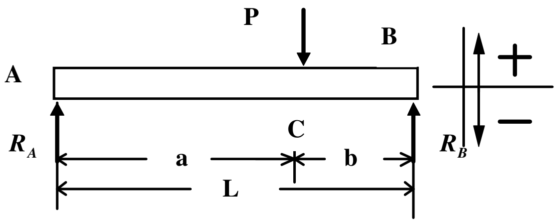
《例題》

求下列簡支樑的斷面剪力、斷面彎矩方程式與分佈圖，並求撓曲曲線的方程式與示意圖.



由靜力平衡求反力，畫負荷分佈圖，再寫出負荷方程式：

$$R_A = P\frac{b}{L};\quad R_B = P\frac{a}{L}$$



寫出負荷方程式：

$$q = R_A\langle x\rangle^{-1} - P\langle x-a\rangle^{-1}$$

積分求斷面剪力方程式

$$V = -R_A + P\langle x-a\rangle_0$$

積分求斷面彎矩方程式

$$M = R_A x - P\langle x-a\rangle^1$$

由雙重積分公式得

$$EIy'' = M$$

$$= R_A x - P\langle x-a\rangle^1$$

邊界條件：

$$y(0) = 0$$

$$y(L) = 0$$

解微分方程式得：

$$EIy' = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{1}{2}P\langle x-a\rangle^2$$

$$+c_1$$

$$EIy = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{1}{6}P\langle x-a\rangle^3$$

$$+c_1 x + c_2$$

代入邊界條件：

$$y(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(L)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}R_A L^3 - \frac{1}{6}P(L-a)^3 + c_1 L = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{6}\frac{P}{L}(L-a)^3 - \frac{1}{6}R_A L^2$$

經整理得：

位移方程式：

$$EIy = \frac{Pb}{6L}\left[x^3 - \left(L^2 - b^2\right)x\right]$$

$$-\frac{1}{6}P\langle x-a\rangle^3$$

斜率方程式：

$$EIy' = \frac{Pb}{6L}\left[3x^2 - \left(L^2 - b^2\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}P\langle x-a\rangle^2$$

Y 最大位移：

在$y'=0$處有最大位移

若$a>b$

$$\frac{Pb}{6L}\left[3x^2-\left(L^2-b^2\right)\right]=0$$

$$x=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$$

代入位移方程式：

$$y_{max}=y\left(\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}\right)$$

$$=\frac{Pb}{9\sqrt{3}EIL}\left(L^2-b^2\right)^{3/2}$$

此時在 A 點的斜率為

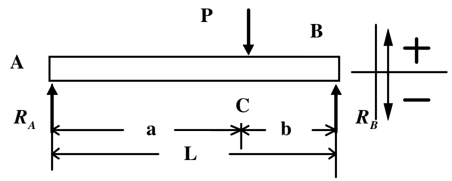
$$y'(0)=-\frac{Pb}{6EIL}\left(L^2-b^2\right)$$

此時在 B 點的斜率為

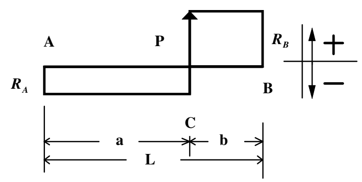
$$y'(0)=\frac{Pb}{6EIL}(L-b)(2L-b)$$

$$=\frac{Pa}{6EIL}\left(L^2-a^2\right)$$

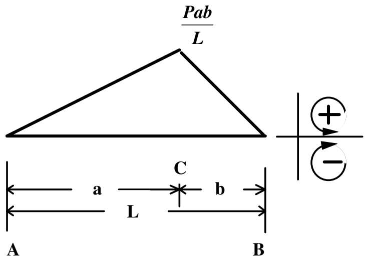
負荷分佈圖：



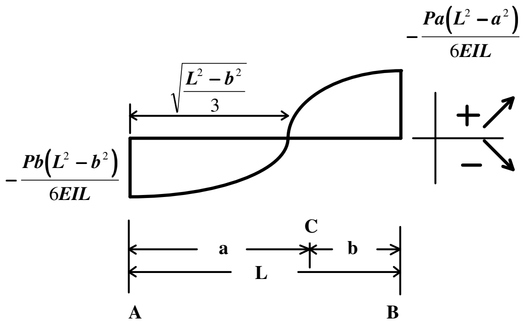
斷面剪力分佈圖：



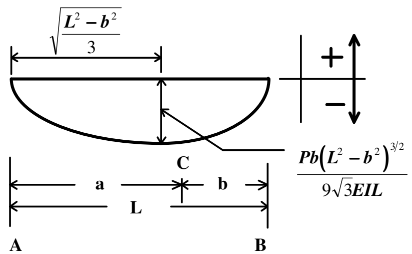
斷面彎矩分佈圖：



斜率分佈圖



位移圖



【特例】

負荷在簡支樑的中央

$$a = b = L/2$$

$$EIy = \frac{P}{48}\left(4x^3 - 3L^2x\right) - \frac{P}{48}\langle 2x - L\rangle^3$$

$$EIy' = \frac{P}{16}\left(4x^2 - L^2\right) - \frac{P}{8}\langle 2x - L\rangle^2$$

最大位移在

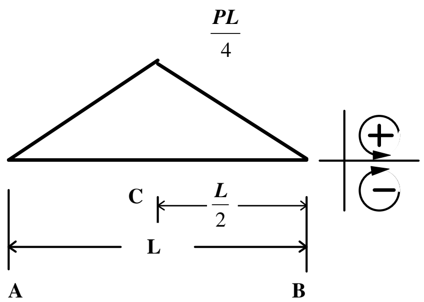
$$x = L/2$$

此點位移為　　　A 點的斜率為　B 點斜率為

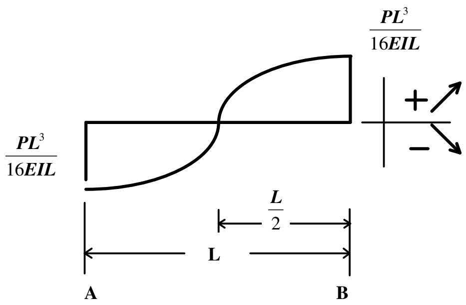
$$y_{max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EI}$$

$$y'(0) = -\frac{PL^2}{16EI} \qquad y'(L) = \frac{PL^2}{16EI}$$

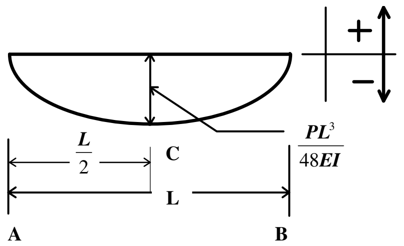
斷面彎矩分佈圖：



斜率分佈圖

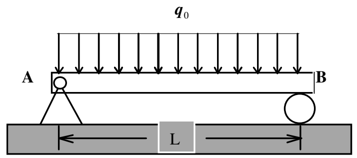


位移圖



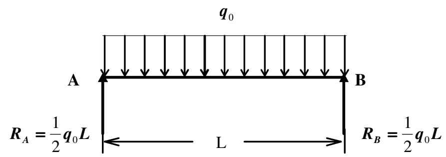
《例題》

求下列均勻負荷簡支樑的斷面剪力、斷面彎矩方程式與分佈圖，並求撓曲曲線的方程式與示意圖。



由靜力平衡求反力，畫負荷分佈圖，再寫出負荷方程式。

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}q_0L$$



負荷方程式：

$$q = R_A \langle x \rangle_{-1} - q_0$$

$$= \frac{1}{2} q_0 L \langle x \rangle_{-1} - q_0$$

積分求斷面剪力方程式

$$V = -\frac{1}{2} q_0 L + q_0 x$$

積分求斷面彎矩方程式

$$M = \frac{1}{2} q_0 L x - \frac{1}{2} q_0 x^2$$

由積分公式得：

$$EIy'' = M$$

$$= \frac{1}{2} q_0 L x - \frac{1}{2} q_0 x^2$$

其邊界條件為

$$y(0) = 0$$

$$y(L) = 0$$

解微分方程式得

$$EIy' = \frac{1}{4} q_0 L x^2 - \frac{1}{6} q_0 x^3 + c_1$$

$$EIy = \frac{1}{12} q_0 L x^3 - \frac{1}{24} q_0 x^4$$

$$+ c_1 x + c_2$$

代入邊界條件得

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{12} q_0 L^4 - \frac{1}{24} q_0 L^4 + c_1 L = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{24} q_0 L^3$$

代入整理得

$$EIy = -\frac{q_0}{24}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3x\right)$$

$$EIy' = -\frac{q_0}{24}\left(4x^3 - 6Lx^2 + L^3\right)$$

在 $y' = 0$ 時位移為最大

$$4x^3 - 6Lx^2 + L^3 = 0$$

$$x = L/2$$

此時

$$y_{max} = y\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= -\frac{5q_0L^4}{384EI}$$

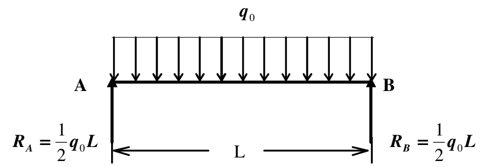
在 A 點的斜率為

$$y'(0) = -\frac{q_0L^3}{24EI}$$

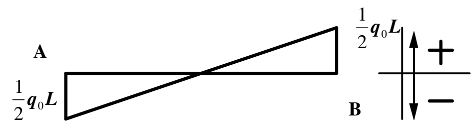
在 B 點的斜率為

$$y'(L) = \frac{q_0L^3}{24EI}$$

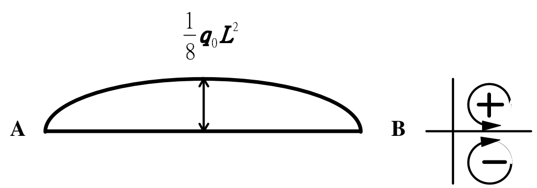
負荷分佈圖：



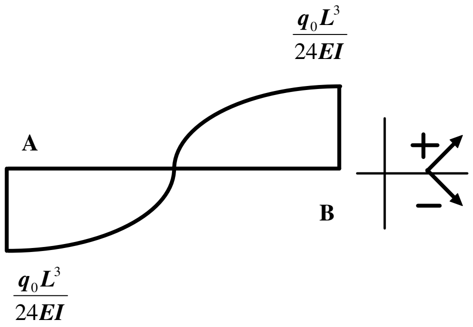
斷面剪力分佈圖



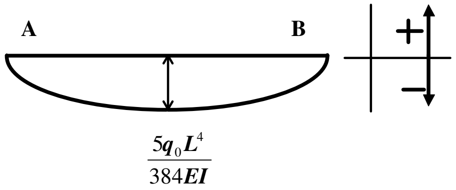
斷面彎矩分佈圖



斜率分佈圖：

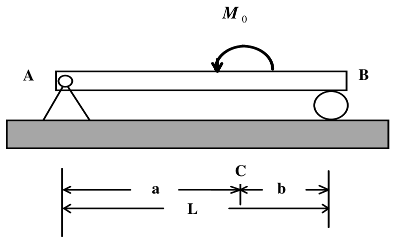


位移圖



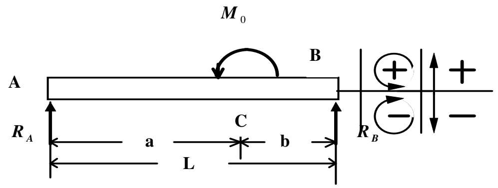
《例題》

求下列簡支樑的斷面剪力、斷面扭矩方程式與分佈圖，並求撓曲曲線的方程式與示意圖。



由靜力平衡求反力，畫負荷分佈圖，再寫出負荷方程式：

$$R_A = \frac{M_0}{L};\quad R_B = -\frac{M_0}{L}$$



負荷方程式：

$$q=\frac{M_0}{L}\langle x\rangle_{-1}+M_0\langle x-a\rangle_{-2}$$

積分求斷面剪力方程式

$$V=-\frac{M_0}{L}+M_0\langle x-a\rangle_{-1}$$

積分求斷面彎矩方程式

$$M=M_0\frac{x}{L}-M_0\langle x-a\rangle^0$$

由積分公式得：

$$EIy''=M$$

$$=M_0\frac{x}{L}-M_0\langle x-a\rangle^0$$

其邊界條件為

$$y(0)=0$$

$$y(L)=0$$

解微分方程式得

$$EIy'=\frac{1}{2}\frac{M_0}{L}x^2-M_0\langle x-a\rangle^1+c_1$$

$$EIy=\frac{1}{6}\frac{M_0}{L}x^3-\frac{1}{2}M_0\langle x-a\rangle^2+c_1x+c_2$$

代入邊界條件

$$y(0)=0\Rightarrow c_2=0$$

$$y(L)=0$$

$$\frac{1}{6}\frac{M_0}{L}L^3-\frac{1}{2}M_0(L-a)^2+c_1L=0$$

$$c_1=-\frac{1}{6}M_0L+\frac{1}{2}\frac{M_0}{L}(L-a)^2$$

代入整理得：

$$EIy=-\frac{1}{6}\frac{M_0}{L}\left(x^3-L^2x\right)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{M_0}{L}\left[L\langle x-a\rangle^2-(L-a)^2x\right]$$

$$EIy'=\frac{1}{6}\frac{M_0}{L}\left(3x^2-L^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{M_0}{L}\left[L\langle x-a\rangle^1-(L-a)^2\right]$$

在 A 點斜率

$$y'(0)=-\frac{M_0L}{6EI}+\frac{M_0}{2EIL}(L-a)^2$$

在 B 點的斜率

$$y'(L)=\frac{M_0L}{3EI}-\frac{1}{2}\frac{M_0}{EIL}\left[L(L-a)-(L-a)^2\right]$$

【特例】

若 $a=L$，負荷在 B 點

$$EIy=-\frac{1}{6}\frac{M_0}{L}\left(x^3-L^2x\right)$$

$$EIy'=\frac{1}{6}\frac{M_0}{L}\left(3x^2-L^2\right)$$

在 $y'=0$ 時有位移為最大

$$3x^2-L^2=0$$

$$x=\frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$y_{max}=y\left(L/\sqrt{3}\right)$$

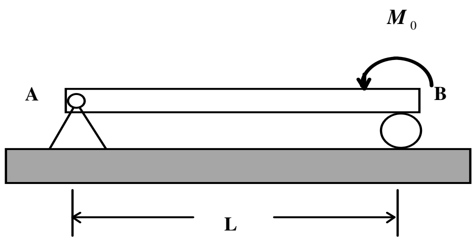
$$=-\frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

此時 A 點斜率

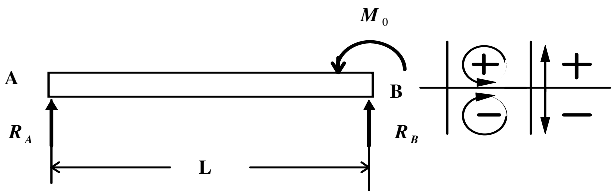
$$y'(0)=-\frac{M_0L}{6EI}$$

此時 B 點的斜率

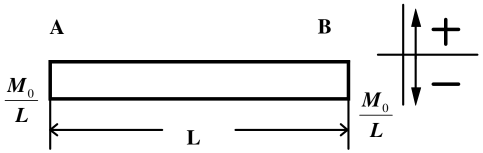
$$y'(L)=\frac{M_0L}{3EI}$$



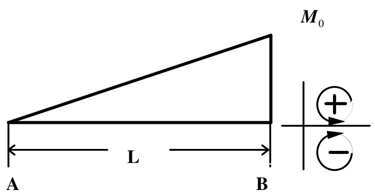
負荷分佈圖：



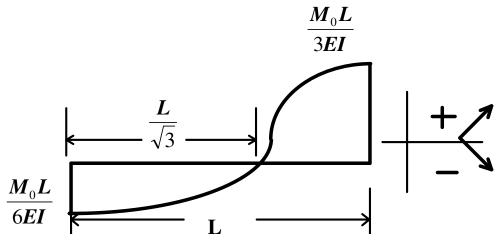
斷面剪力分佈圖：



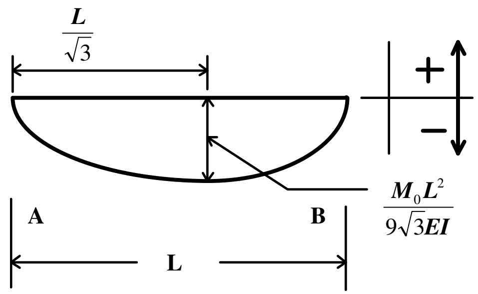
斷面彎矩分佈圖：



斜率分佈圖

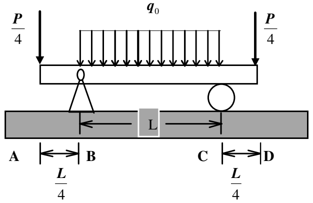


位移圖



（五）外伸樑的撓曲曲線

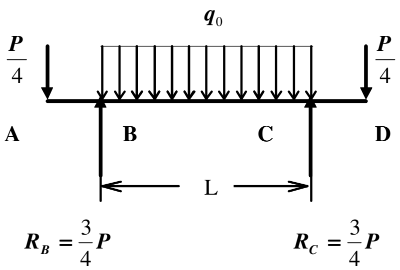
《例題》求下列均勻負荷 $q_0L=P$ 與集中負荷外伸樑的斷面剪力、斷面彎矩方程式與分佈圖，並求撓曲曲線的方程式與示意圖。



由靜力平衡求反力，畫負荷分佈圖，再寫出負荷方程式。

$$R_B=R_C=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2}+q_0L\right)$$

$$=\frac{3}{4}P$$



負荷方程式：

$$q=-\frac{P}{4}\langle x\rangle_{-1}+\frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle_{-1}$$
$$-q_0\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle_0+q_0\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle_0$$
$$+\frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle_{-1}$$

積分求斷面剪力方程式

$$V=+\frac{P}{4}\langle x\rangle_0-\frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle_0$$
$$+q_0\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^1-q_0\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^1$$
$$-\frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle_0$$

積分求斷面彎矩方程式

$$M=-\frac{P}{4}\langle x\rangle^1+\frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^1$$
$$-\frac{q_0}{2}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^2+\frac{q_0}{2}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^2$$
$$+\frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^1$$

由積分公式得：

$$EIy'' = M$$

$$= -\frac{P}{4}\left\langle x\right\rangle^{1} + \frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^{1}$$

$$-\frac{q_0}{2}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^{2} + \frac{q_0}{2}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^{2}$$

$$+\frac{3P}{4}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^{1}$$

其邊界條件

$$y\left(\frac{L}{4}\right)=0$$

$$y\left(\frac{3L}{4}\right)=0$$

解微分方程式得：

$$EIy' = -\frac{P}{8}\left\langle x\right\rangle^{2} + \frac{3P}{8}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^{2}$$

$$-\frac{q_0}{6}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^{3} + \frac{q_0}{6}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^{3}$$

$$+\frac{3P}{8}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^{2} + c_1$$

$$EIy = -\frac{P}{24}\left\langle x\right\rangle^{3} + \frac{3P}{24}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^{3}$$

$$-\frac{q_0}{24}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^{4} + \frac{q_0}{24}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^{4}$$

$$+\frac{3P}{24}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^{3} + c_1 x + c_2$$

代入邊界條件得：

$$y\left(\frac{L}{4}\right)=0\Rightarrow$$

$$-\frac{P}{24}\left(\frac{L}{4}\right)^3+\frac{L}{4}c_1+c_2=0$$

$$y\left(\frac{5L}{4}\right)=0\Rightarrow$$

$$-\frac{P}{24}\left(\frac{5L}{4}\right)^3+\frac{3P}{24}L^3$$

$$-\frac{q_0}{24}L^4+\frac{5L}{4}c_1+c_2=0$$

連立解得

$$c_1=-\frac{P}{2^7\cdot 3}L^2$$

$$c_2=\frac{P}{2^8\cdot 3}L^3$$

代入得

$$EIy'=-\frac{P}{8}\langle x\rangle^2+\frac{3P}{8}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^2$$

$$-\frac{q_0}{6}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^3+\frac{q_0}{6}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^3$$

$$+\frac{3P}{8}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^2-\frac{P}{2^8\cdot 3}L^2$$

$$EIy=-\frac{P}{24}\langle x\rangle^3+\frac{3P}{24}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^3$$

$$-\frac{q_0}{24}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^4+\frac{q_0}{24}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^4$$

$$+\frac{3P}{24}\left\langle x-\frac{5L}{4}\right\rangle^3-\frac{P}{2^7\cdot 3}L^2x$$

$$+\frac{P}{2^8\cdot 3}L^3$$

由於對稱而知在$x = L/2$時位移量為最大

$$y_{max} = y\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= -\frac{P}{24EI}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{3P}{24EI}\left(\frac{L}{4}\right)^3$$

$$-\frac{P}{24LEI}\left(\frac{L}{4}\right)^4 - \frac{P}{6\cdot 4^3 EI}L^2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$+\frac{P}{3\cdot 4^4 EI}L^3$$

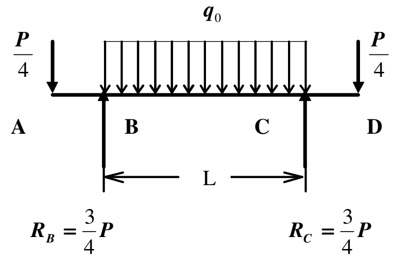
$$= -\frac{7PL^3}{2^{11}EI}$$

在端點 A,D 的位移

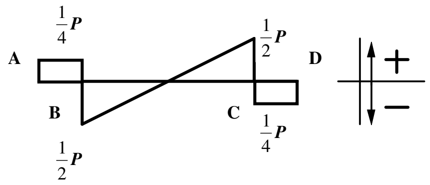
$$y(0) = y\left(\frac{3}{2}L\right)$$

$$= \frac{PL^3}{2^8\cdot 3EI}$$

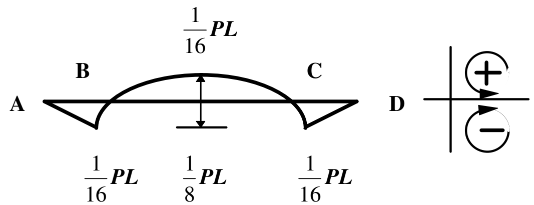
負荷分佈圖：



斷面剪力分佈圖



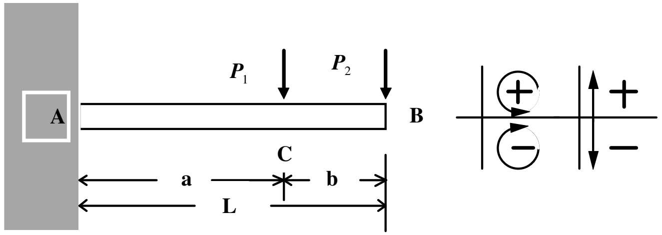
斷面彎矩分佈圖



（六）懸臂樑的撓曲曲線

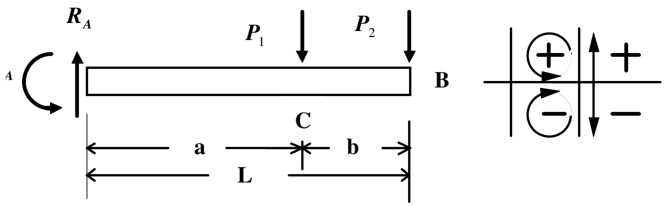
《例題》

求下列懸臂樑的斷面剪力、斷面彎矩方程式與分佈圖，並求撓曲曲線的方程式與示意圖。



由靜力平衡求反力，畫負荷分佈圖，再寫出負荷方程式：

$$R_A = P_1 + P_2; \quad M_A = P_1 a + P_2 L$$



負荷方程式：

$$q = (P_1 + P_2)\langle x \rangle_{-1} + (P_1 a + P_2 L)\langle x \rangle_{-2} - P_1\langle x - a \rangle_{-1}$$

積分求斷面剪力方程式

$$V = -(P_1 + P_2) + (P_1 a + P_2 L)\langle x \rangle_{-1} + P_1\langle x - a \rangle_0$$

積分求斷面彎矩方程式

$$M = (P_1 + P_2)x - (P_1 a + P_2 L) + P_1\langle x - a \rangle^1$$

由積分公式得

$$EIy'' = M$$

$$= (P_1 + P_2)x - (P_1 a + P_2 L)$$

$$+ P_1 \langle x - a \rangle^1$$

其邊界條件為

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

解微分方程式得

$$EIy' = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)x^2$$

$$-(P_1 a + P_2 L)x + \frac{1}{2}P_1 \langle x - a \rangle^2$$

$$+ c_1$$

$$EIy = \frac{1}{6}(P_1 + P_2)x^3$$

$$-\frac{1}{2}(P_1 a + P_2 L)x^2 + \frac{1}{6}P_1 \langle x - a \rangle^3$$

$$+ c_1 x + c_2$$

代入邊界條件

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

位移方程式：

$$EIy = \frac{1}{6}(P_1 + P_2)x^3$$

$$-\frac{1}{2}(P_1 a + P_2 L)x^2 + \frac{1}{6}P_1 \langle x - a \rangle^3$$

斜率方程式：

$$EIy' = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)x^2$$

$$-(P_1 a + P_2 L)x + \frac{1}{2}P_1 \langle x - a \rangle^2$$

【特例】

$$P_1 = 0; \quad P_2 = P$$

$$y = \frac{PL^3}{6EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$y' = \frac{PL^2}{2EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

最大位移在自由端

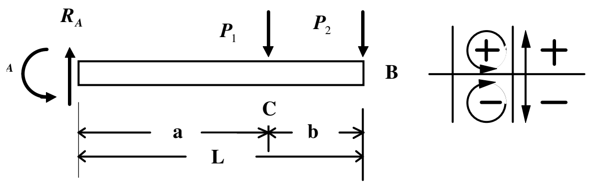
$$y_{max} = y(L)$$

$$= -\frac{PL^3}{3EI}$$

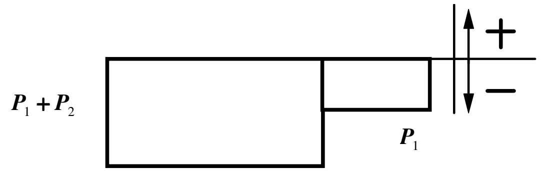
其斜率為

$$\theta_B = y'(L) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

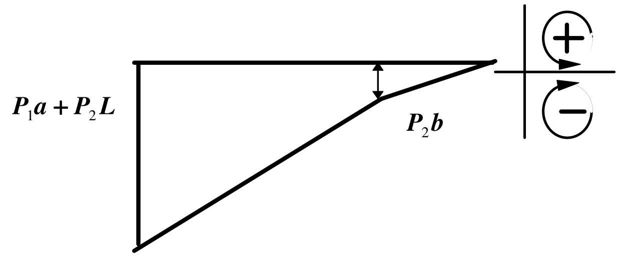
負荷分佈圖：



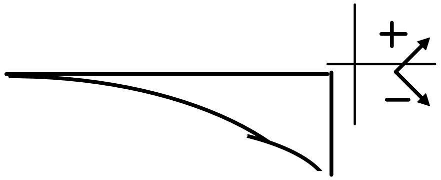
斷面剪力分佈圖：



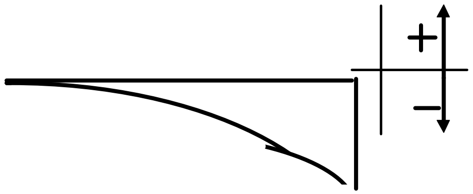
斷面彎矩分佈圖：



斜率分佈圖

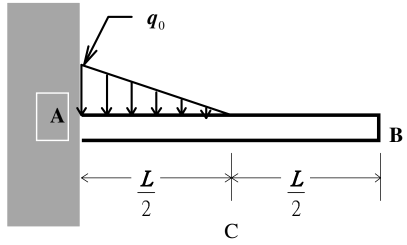


位移圖



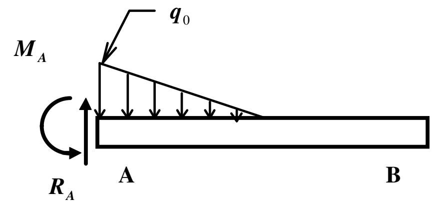
《例題》

求下列懸臂樑的斷面剪力、斷面彎矩方程式與分佈圖，並求撓曲曲線的方程式與示意圖。



由靜力平衡求反力，畫負荷分佈圖，再寫出負荷方程式並：

$$R_A = \frac{q_0 L}{4}; \quad M_A = \frac{q_0 L^2}{24}$$



負荷方程式：

$$q=\frac{q_0L}{4}\langle x\rangle_{-1}+\frac{q_0L^2}{24}\langle x\rangle_{-2}$$

$$-q_0\langle x\rangle_0+\frac{2q_0}{L}\langle x\rangle^1-\frac{2q_0}{L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^1$$

積分求斷面剪力方程式

$$V=-\frac{q_0L}{4}+\frac{q_0L^2}{24}\langle x\rangle_{-1}$$

$$+q_0\langle x\rangle^1-\frac{q_0}{L}\langle x\rangle^2+\frac{q_0}{L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^2$$

積分求斷面彎矩方程式

$$M=\frac{q_0L}{4}x-\frac{q_0L^2}{24}\langle x\rangle_0$$

$$-\frac{q_0}{2}\langle x\rangle^2+\frac{q_0}{3L}\langle x\rangle^3-\frac{q_0}{3L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^3$$

由積分公式得：

$$EIy''=M$$

$$=\frac{q_0L}{4}x-\frac{q_0L^2}{24}\langle x\rangle_0-\frac{q_0}{2}\langle x\rangle^2$$

$$+\frac{q_0}{3L}\langle x\rangle^3-\frac{q_0}{3L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^3$$

其邊界條件：

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=0$$

解微分方程式得：

$$EIy'=\frac{q_0L}{8}x^2-\frac{q_0L^2}{24}x-\frac{q_0}{6}x^3$$

$$+\frac{q_0}{12L}x^4-\frac{q_0}{12L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4+c_1$$

$$EIy=\frac{q_0L}{24}x^3-\frac{q_0L^2}{48}x^2-\frac{q_0}{24}x^4$$

$$+\frac{q_0}{60L}x^5-\frac{q_0}{60L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^5+c_1x+c_2$$

代入邊界條件

$$y(0)=0\Rightarrow c_2=0$$

$$y'(0)=0\Rightarrow c_1=0$$

位移方程式：

$$EIy=\frac{q_0L}{24}x^3-\frac{q_0L^2}{48}x^2-\frac{q_0}{24}x^4+\frac{q_0}{60L}x^5-\frac{q_0}{60L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^5$$

斜率方程式：

$$EIy'=\frac{q_0L}{8}x^2-\frac{q_0L^2}{24}x-\frac{q_0}{6}x^3+\frac{q_0}{12L}x^4-\frac{q_0}{12L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4$$

【特殊值】

$$y'\left(\frac{L}{2}\right)=-\frac{q_0L^3}{192EI}$$

且 $x>\frac{L}{2}$ 時

$$EIy'=\frac{q_0L}{8}x^2-\frac{q_0L^2}{24}x-\frac{q_0}{6}x^3+\frac{q_0}{12L}x^4-\frac{q_0}{12L}\left(x-\frac{L}{2}\right)^4$$

$$\therefore y'(x\geq L/2)=-\frac{q_0L^3}{192EI}$$

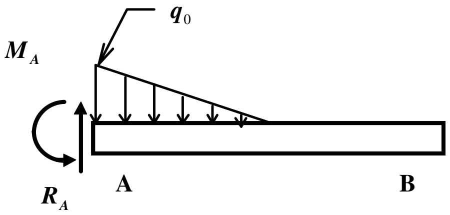
$$y\left(\frac{L}{2}\right)=-\frac{q_0L^4}{480EI}$$

且 $x>\frac{L}{2}$ 時

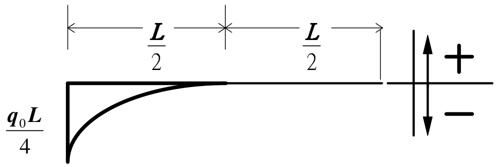
$$EIy=\frac{q_0L}{24}x^3-\frac{q_0L^2}{48}x^2-\frac{q_0}{24}x^4+\frac{q_0}{60L}x^5-\frac{q_0}{60L}\left(x-\frac{L}{2}\right)^5$$

$$y(x\geq L/2)=-\frac{q_0L^4}{480EI}-\frac{q_0L^3}{192EI}\left(x-\frac{L}{2}\right)$$

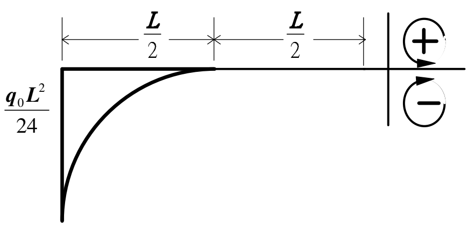
負荷分佈圖：



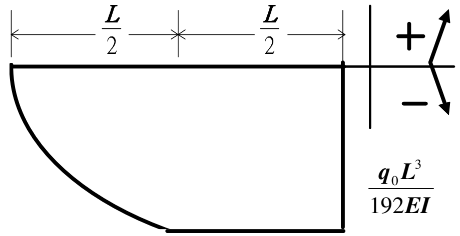
斷面剪力分佈圖：



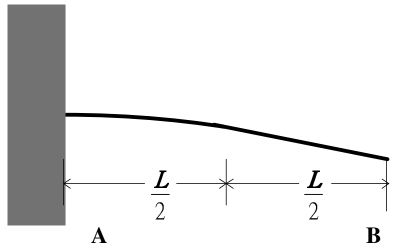
斷面彎矩分佈圖：



斜率分佈圖



位移圖



三、負荷積分方程式

（一）公式由來

由上節得到：

$$EIy'' = M$$

若 EI 不是 x 的函數，微分得

$$EIy''' = \frac{dM}{dx} = -V$$

若 EI 不是 x 的函數，再微分得

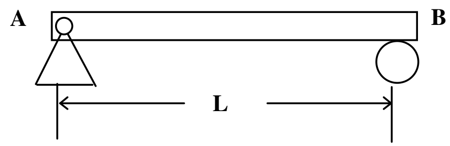
$$EIy'''' = -\frac{dV}{dx} = q(x)$$

因此得到負荷與位移的關係微分方程式。

(二)邊界條件

負荷微分方程式為四階方程式，必須有四個邊界條件；靜定樑的邊界條件如下

1. 簡支樑



撓曲時

在端點 A 不能承受彎矩 $M(0) = 0$

$$\Rightarrow y''(0) = 0$$

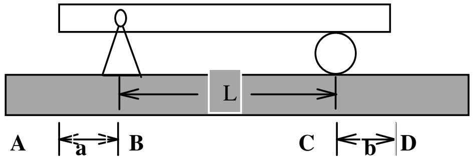
在端點 B 不能承受彎矩 $M(L) = 0$

$$\Rightarrow y''(L) = 0$$

在 A 點無位移 $y(0) = 0$

在 B 點無位移 $y(L) = 0$

2.外伸樑



撓曲時

在端點 A 不能承受彎矩 $M(0)=0$

$$\Rightarrow y''(0)=0$$

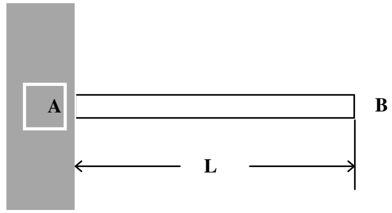
在端點 D 不能承受彎矩 $M(L+a+b)=0$

$$\Rightarrow y''(L+a+b)=0$$

在 B 點位移為 0 $y(a)=0$

在 C 點位移為 0 $y(a+L)=0$

3.懸臂樑



撓曲時

在 A 點斜率為 0 $y'(0)=0$

在 A 點無位移 $y(0)=0$

在自由端 B 不能承受彎矩 $M(L)=0$

$$\Rightarrow y''(L)=0$$

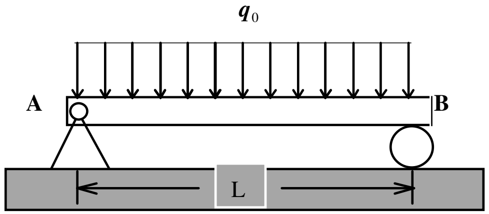
在自由端 B 沒有剪力作用 $V(L)=0$

$$\Rightarrow y'''(L)=0$$

（三）應用負荷微分方程式

《例題》

求下列均勻負荷簡支樑的斷面剪力、斷面彎矩方程式，並求撓曲曲線的方程式。



由負荷微分方程式

$$EIy'''' = q(x)$$
$$= -q_0$$

其邊界條件為

$$y''(0) = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$y''(L) = 0$$
$$y(L) = 0$$

積分得

$$EIy''' = -V$$
$$= -q_0 x + c_1$$

再積分得

$$EIy'' = M$$
$$= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + c_1 x + c_2$$

再積分得

$$EIy' = -\frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

再積分得

$$EIy = -\frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2$$
$$+ c_3 x + c_4$$

代入邊界條件得

$$y''(0)=0\Rightarrow c_2=0$$

$$y''(0)=0\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}q_0L$$

$$y(0)=0\Rightarrow c_4=0$$

$$y(L)=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{12}q_0L^4-\frac{1}{24}q_0L^4+c_3L=0$$

$$c_3=\frac{1}{24}q_0L^3$$

代入整理得

撓曲曲線方程式：

$$EIy=-\frac{q_0}{24}\left(x^4-2Lx^3+L^3x\right)$$

斜率方程式：

$$EIy'=-\frac{q_0}{24}\left(4x^3-6Lx^2+L^3\right)$$

彎矩方程式

$$M=EIy''$$

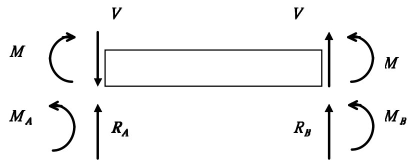
$$=-\frac{q_0}{2}\left(x^2-Lx\right)$$ ；

剪力方程式：

$$-V=EIy'''$$

$$=\frac{q_0L}{2}-q_0x$$

由剪力方程式求反力：



$$R_A=-V(0)$$

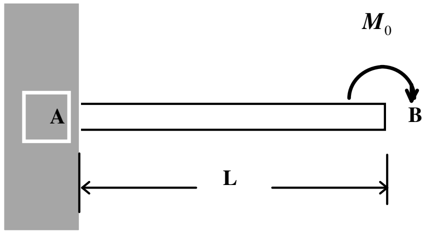
$$=\frac{q_0L}{2}$$

$$R_B=V(L)$$

$$=\frac{q_0L}{2}$$

《例題》

求下列集中彎矩負荷懸臂樑的斷面剪力、斷面彎矩方程式，並求撓曲曲線的方程式。



由負荷微分方程式

$$EIy'''' = q(x)$$
$$= -M_0\langle x-L\rangle_{-2}$$

其邊界條件為

$$y''(0) = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$y'''(L) = 0$$
$$y''''(L) = 0$$

積分得

$$EIy''' = -V$$
$$= M_0\langle x-L\rangle_{-1} + c_1$$

再積分得

$$EIy'' = M$$
$$= M_0\langle x-L\rangle^0 + c_1x + c_2$$

再積分得

$$EIy' = M_0\langle x-L\rangle^1 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3$$

再積分得

$$EIy = \frac{1}{2}M_0\langle x-L\rangle^2 + \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4$$

代入邊界條件得

$$y'''(L)=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$y''(L)=0 \Rightarrow c_2=-M_0$$

$$y(0)=0 \Rightarrow c_4=0$$

$$y'(0)=0 \Rightarrow c_3=0$$

代入整理得

撓曲曲線方程式：

$$EIy=-\frac{M_0}{2}x^2$$

斜率方程式：

$$EIy'=-M_0x$$

彎矩方程式

$$M=EIy''$$

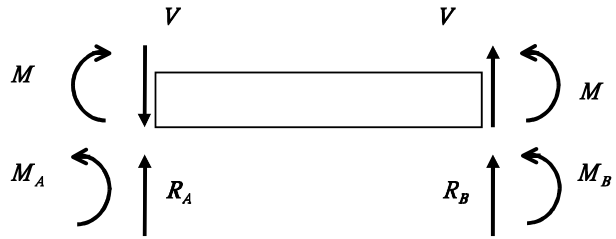
$$=M_0\langle x-L\rangle_0-M_0$$ ：

剪力方程式：

$$-V=EIy'''$$

$$=M_0\langle x-L\rangle_{-1}$$

由彎矩方程式求反力矩：



$$M_A=-M(0)$$

$$=M_0$$

由剪力方程式求反力：

$$R_A=-V(0)$$

$$=0$$

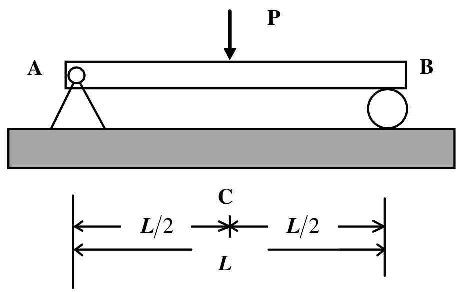
四、重疊法

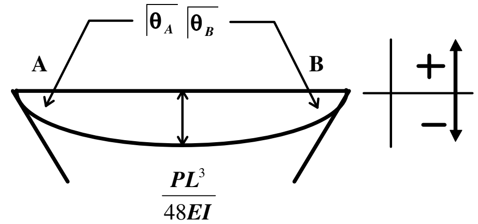
重疊法適用於求樑之某一特定點的位移；且常用於求靜不定樑的反力。

方法簡單，但必須記憶一些常見負荷的基本公式。

（一）常用公式

1. 簡支樑中置集中負荷





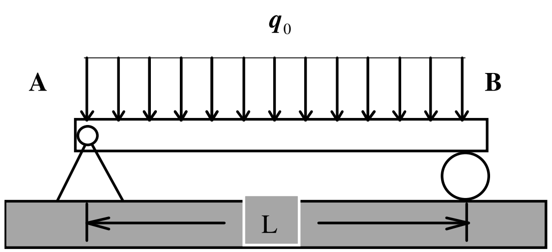
$$\delta_{max} = \delta(L/2)$$

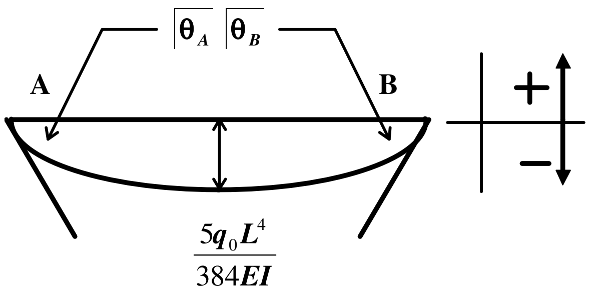
$$= -\frac{PL^3}{48EI}$$

$$\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$$

$$\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

2. 簡支樑均勻分佈負荷





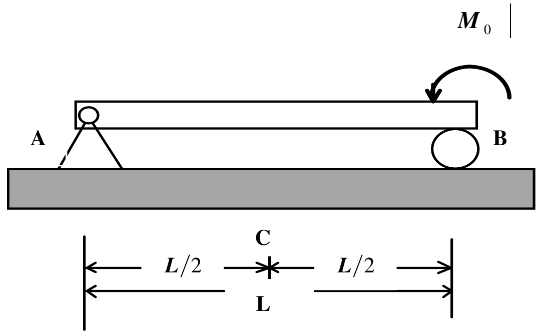
$$\delta_{max} = \delta(L/2)$$

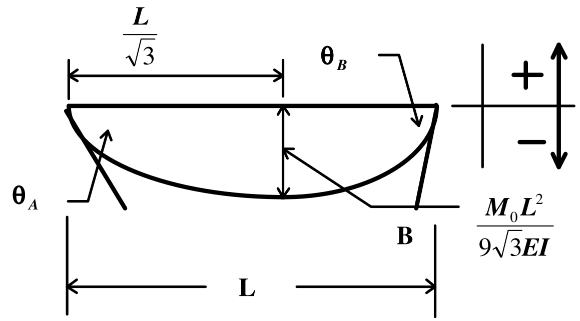
$$= -\frac{5q_0L^4}{384EI}$$

$$\theta_A = -\frac{q_0L^3}{24EI}$$

$$\theta_B = \frac{q_0L^3}{24EI}$$

3. 簡支樑旁置集中彎矩





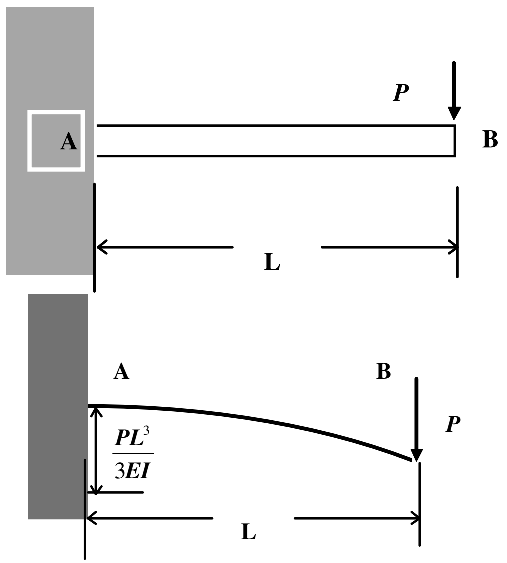
$$\delta_{max} = \delta(L/\sqrt{3})$$

$$= -\frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

$$\theta_A = -\frac{M_0L}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{M_0L}{3EI}$$

4. 懸臂樑自由端有集中負荷



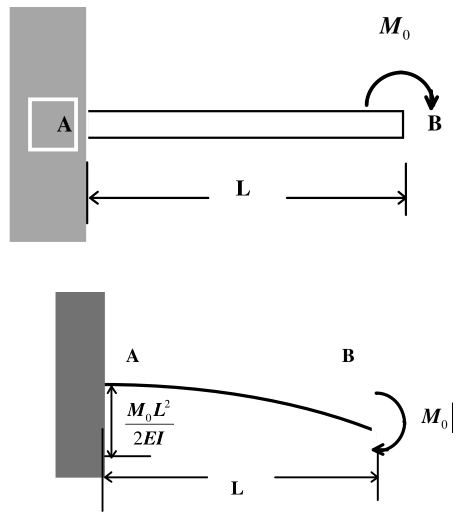
$$\delta_{max} = \delta(L)$$

$$= -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$\theta_A = 0$$

$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

4. 懸臂樑自由端有集中彎矩



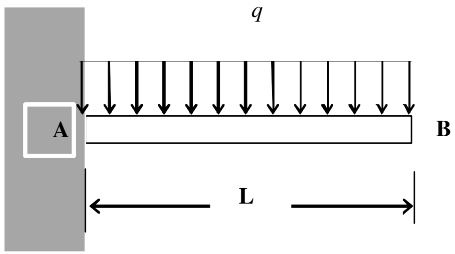
$$\delta_{max} = \delta(L)$$

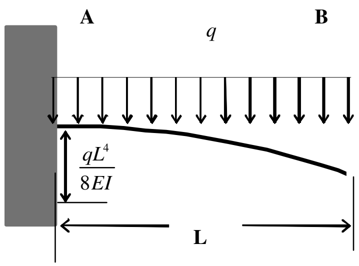
$$= -\frac{M_0L^2}{2EI}$$

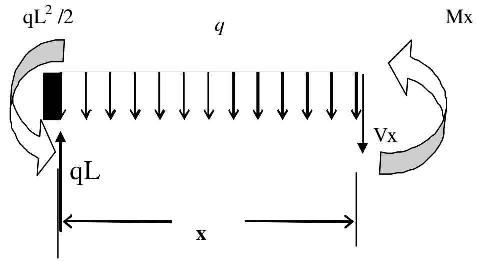
$$\theta_A = 0$$

$$\theta_B = -\frac{M_0L}{EI}$$

4.懸臂樑均勻分佈負荷







$$M_x = qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$EIY'' = -Mx = qLx - \frac{qL^2}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

（斜率）$EIY' = \frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{2} + \frac{qL^2x}{2} + C_1$

（撓度）$EIY =$

$$\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{6} + \frac{qL^2x^2}{4} + C_1x + C_2$$

$$\delta_{max} = Y_{x->L} = \frac{qL^4}{8EI}$$

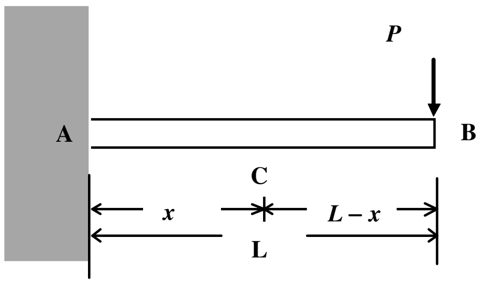
$$\theta_A = 0$$

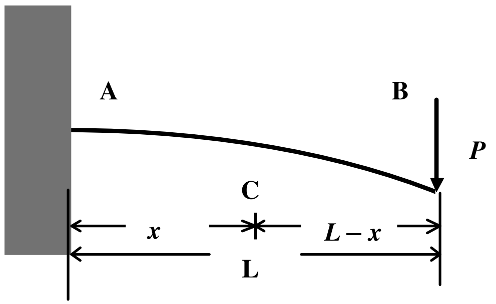
$$\theta_B = Y'_{X->L} = \frac{qL^3}{6EI}$$

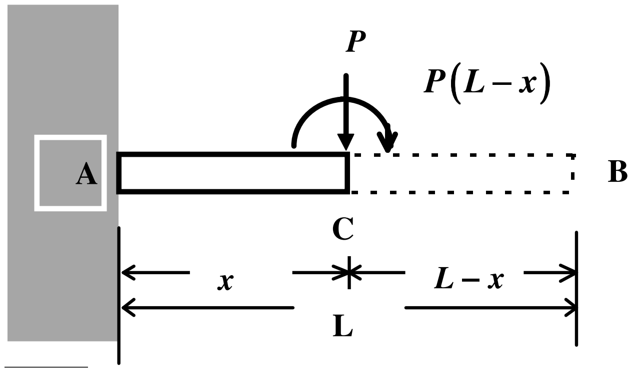
（二）應用重疊法於懸臂樑

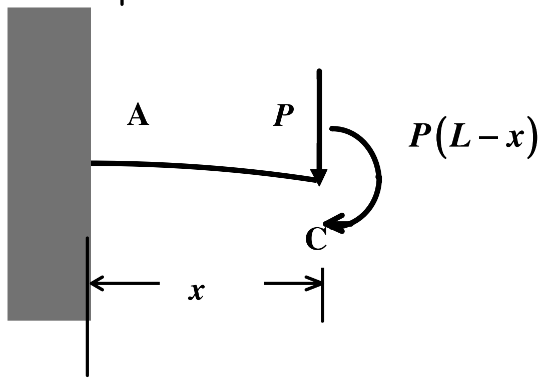
《例題》

求下列懸臂樑在 C 點的位移。









$$\theta_c = \overbrace{\theta_P}^{\text{集中力產生的位移}} + \overbrace{\theta_M}^{\text{彎矩產生的位移}}$$

$$= -\frac{Px^2}{2EI} - \frac{\left(P\left(L-x\right)\right)x}{EI}$$

$$= \frac{P}{2EI}\left(x^2 - 2Lx\right)$$

$$\delta_c = \overbrace{\delta_P}^{\text{集中力產生的位移}} + \overbrace{\delta_M}^{\text{彎矩產生的位移}}$$

$$= -\frac{Px^3}{3EI} - \frac{\left(P\left(L-x\right)\right)x^2}{2EI}$$

$$= \frac{P}{6EI}\left(x^3 - 3Lx^2\right)$$

【特殊值】

C 點在樑的中央

$$x = L/2$$

$$\theta_C = -\frac{3PL^2}{8EI}$$

$$\delta_C = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

B 點為自由端

$$x = L$$

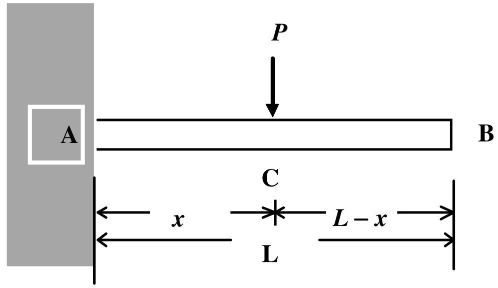
$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

$$\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}$$

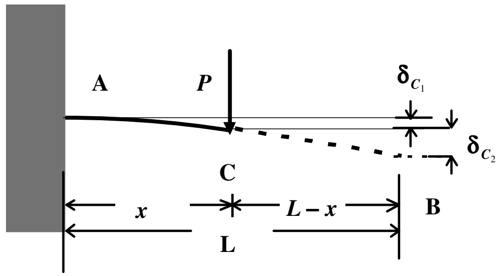
《例題》

負荷不在自由端的懸臂樑

求下列懸臂樑在 B 點的位移。



;



$$\theta_B = \theta_C = -\frac{Px^2}{2EI}$$

$$\delta_B = \overbrace{\delta_{C_1}}^{C\text{點的位移}} + \overbrace{\delta_{C_2}}^{\text{延長線產生的位移}}$$

$$= -\frac{Px^3}{3EI} + \left(\underbrace{-\frac{Px^2}{2EI}}_{C\text{點的斜率}} \cdot \underbrace{(L-x)}_{\text{延長線長}} \right)$$

$$= \frac{P}{6EI}\left(x^3 - 3Lx^2\right)$$

【特殊值】

C 點在樑的中央

$$x = L/2$$

$$\theta_B = \theta_C = -\frac{PL^2}{8EI}$$

$$\delta_B = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

附和在自由端

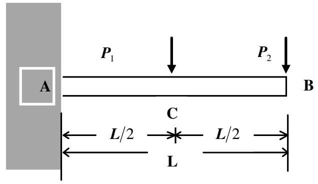
$$x = L$$

$$\theta_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

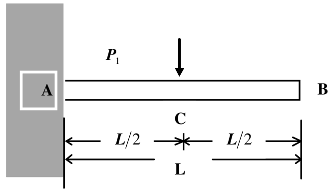
$$\delta_B = -\frac{PL^3}{3EI}$$

《例題》

求下列懸臂樑在 B 點的位移。



將兩個負荷分別考慮：



C 點由 P_1 產生的斜率

$$\theta_{C_1} = -\frac{P_1(L/2)^2}{2EI} = -\frac{P_1L^2}{8EI}$$

C 點由 P_1 產生的位移

$$\delta_C = -\frac{P_1(L/2)^3}{3EI} = -\frac{P_1L^3}{24EI}$$

B 點由 P_1 產生的斜率

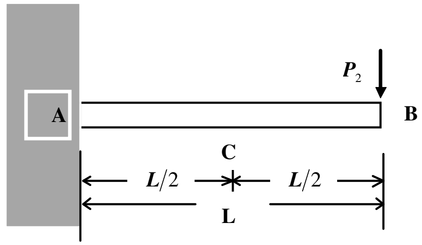
$$\theta_{B_1} = \theta_{C_1} = -\frac{P_1L^2}{8EI}$$

B點由P_1產生的位移

$$\delta_{B1}=\overbrace{\delta_{C_{11}}}^{C\text{點的位移}}+\overbrace{\delta_{C_{12}}}^{\text{延長線產生的位移}}$$

$$=-\frac{P(L/2)^3}{3EI}+\left(\underbrace{-\frac{P(L/2)^2}{8EI}}_{C\text{點的斜率}}\cdot\underbrace{\frac{L}{2}}_{\text{延長線長}}\right)$$

$$=-\frac{5PL^3}{48EI}$$



C點由P_2產生的斜率

$$\theta_{C_2}=\overbrace{\theta_{P_2}}^{\text{集中力產生的位移}}+\overbrace{\theta_{M_2}}^{\text{彎矩產生的位移}}$$

$$=-\frac{P(L/2)^2}{2EI}-\frac{(P(L/2))(L/2)}{EI}$$

$$=-\frac{3PL^3}{8EI}$$

C點由P_2產生的位移

$$\delta_{C_2}=\overbrace{\delta_{P_2}}^{\text{集中力產生的位移}}+\overbrace{\delta_{M_2}}^{\text{彎矩產生的位移}}$$

$$=-\frac{P(L/2)^3}{3EI}-\frac{(P(L/2))(L/2)^2}{2EI}$$

$$=-\frac{5PL^3}{48EI}$$

B點由P_2產生的斜率

$$\theta_{B_2} = -\frac{P_2L^2}{2EI}$$

B點由P_2產生的位移

$$\delta_{B_2} = -\frac{P_2L^3}{3EI}$$

B點斜率

$$\theta_B = \theta_{B_1} + \theta_{B_2}$$
$$= -\frac{P_1L^2}{8EI} - \frac{P_2L^2}{2EI}$$

B點位移

$$\delta_B = \delta_{B_1} + \delta_{B_2}$$
$$= -\frac{5P_1L^3}{48EI} - \frac{P_2L^3}{3EI}$$

C點斜率

$$\theta_C = \theta_{C_1} + \theta_{C_2}$$
$$= -\frac{P_1L^2}{8EI} - \frac{3P_2L^2}{8EI}$$

C點位移

$$\delta_C = \delta_{C_1} + \delta_{C_2}$$
$$= -\frac{P_1L^3}{24EI} - \frac{5P_2L^3}{48EI}$$

【特殊值】

$$P_1 = P_2 = P$$

B 點斜率

$$\theta_B = -\frac{5PL^2}{8EI}$$

B 點位移

$$\delta_B = -\frac{7PL^3}{16EI}$$

C 點斜率

$$\theta_C = -\frac{PL^2}{2EI}$$

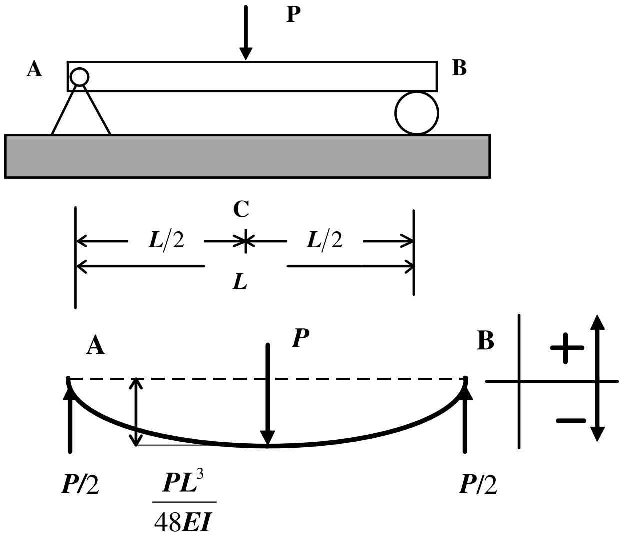
C 點位移

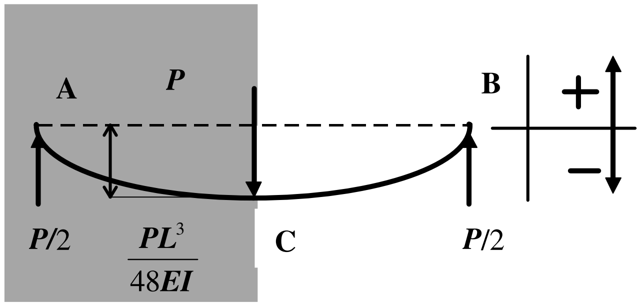
$$\delta_C = -\frac{7PL^3}{48EI}$$

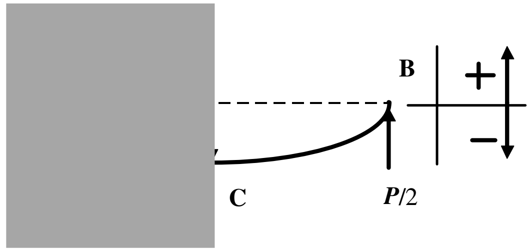
（三）應用重疊法求對稱簡支樑的位移

《例題》

求下列簡支樑最大的位移。







$$\delta_{B/C} = -\frac{(-P/2)(L/2)^3}{3EI}$$

$$= \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\delta_{C/B} = -\frac{PL^3}{48EI}$$

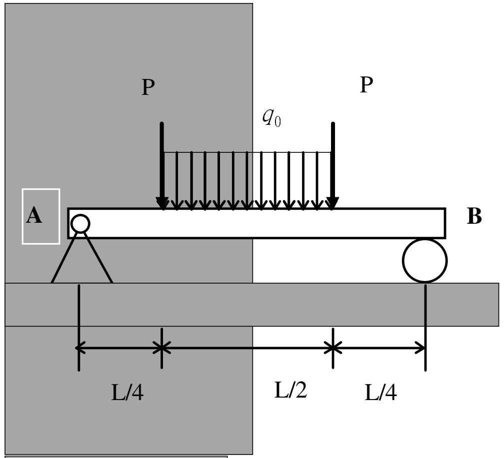
$$\theta_C = 0$$

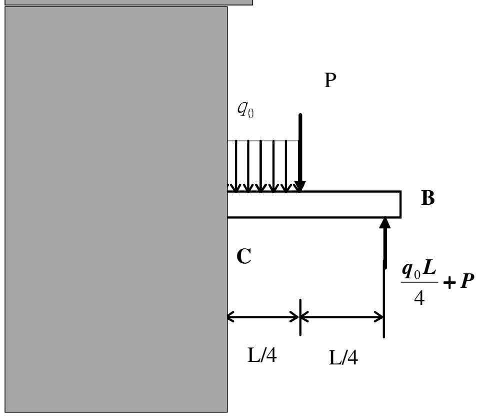
$$\theta_B = -\frac{(-P/2)(L/2)^2}{2EI}$$

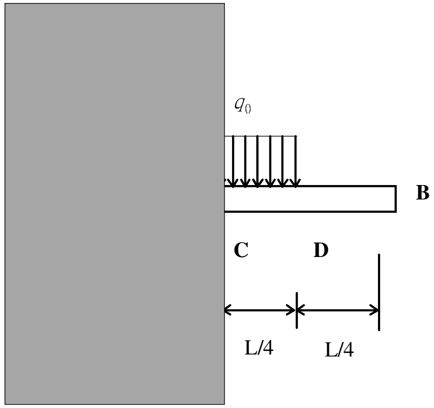
$$= \frac{PL^2}{2EI}$$

《例題》

求下列簡支樑最大的位移。







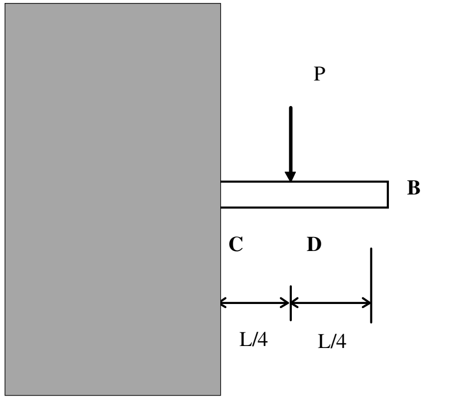
$$\theta_{B_1}=\theta_{D_1}=-\frac{q_0(L/4)^3}{6EI}$$

$$=-\frac{q_0L^3}{384EI}$$

$$\delta_{B_1}=\overbrace{\delta_{D_1}}^{D\text{點的位移}}+\overbrace{\delta_{D_2}}^{\text{延長線產生的位移}}$$

$$=-\frac{q_0(L/4)^4}{8EI}+\left(\underbrace{-\frac{q_0L^3}{384EI}}_{C\text{點的斜率}}\cdot\underbrace{(L/4)}_{\text{延長線長}}\right)$$

$$=-\frac{7q_0L^4}{6\cdot 4^5EI}$$



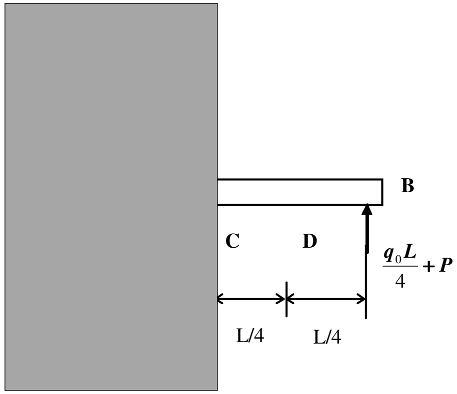
$$\theta_{B_2} = \theta_{D_2} = -\frac{P\left(L/4\right)^2}{2EI}$$

$$= -\frac{PL^2}{32EI}$$

$$\delta_{B_2} = \overbrace{\delta_{D_{211}}}^{D\text{點的位移}} + \overbrace{\delta_{C_{22}}}^{\text{延長線產生的位移}}$$

$$= -\frac{P\left(L/4\right)^3}{3EI} + \left(\underbrace{-\frac{PL^2}{32EI}}_{C\text{點的斜率}} \cdot \underbrace{\left(L/4\right)}_{\text{延長線長}}\right)$$

$$= \frac{5PL^3}{6\cdot 4^3 EI}$$



$$\delta_{B_3} = \frac{P\left(L/2\right)^3}{3EI} + \frac{\left(q_0 L/4\right)\left(L/2\right)^3}{3EI}$$

$$= \frac{PL^3}{24EI} + \frac{q_0 L^4}{96EI}$$

$$\delta_B = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

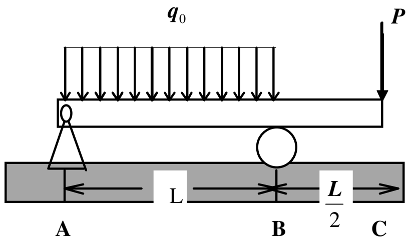
$$= -\frac{7q_0 L^4}{6\cdot 4^5 EI} - \frac{5PL^3}{6\cdot 4^3 EI}$$

$$+ \frac{PL^3}{24EI} + \frac{q_0 L^4}{96EI}$$

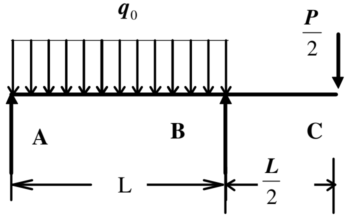
$$= \frac{11PL^3}{6\cdot 4^3 EI} + \frac{57q_0 L^4}{6\cdot 4^5 EI}$$

《例題》

下圖所示之外伸樑，求 C 點的位移。



做自由體圖，求 A 與 B 點反力 $\boldsymbol{R_A, R_B}$ 。

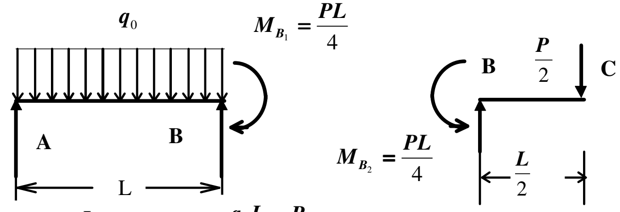


$$R_A = \frac{q_0 L}{2} - \frac{P}{4} \qquad R_B = \frac{q_0 L}{2} + \frac{3P}{4}$$

將外伸樑在 B 點分割成一簡支樑與一懸臂樑；

注意分割點上有斷面剪力 $\boldsymbol{M_{B_1}}$ 、$\boldsymbol{M_{B_2}}$ ，斷面剪力 $\boldsymbol{R_{B_1}}$ 、$\boldsymbol{R_{B_2}}$ 分別作用於左右斷面。

由靜力平衡得：



$$R_A = \frac{q_0 L}{2} - \frac{P}{4} \qquad R_{B_1} = \frac{q_0 L}{2} + \frac{P}{4} \qquad R_{B_2} = \frac{P}{2}$$

$$\sum \boldsymbol{R_{B_i}} = \boldsymbol{R_B}$$

$$\sum \boldsymbol{M_{B_i}} = \boldsymbol{M_B} = 0\text{；}$$

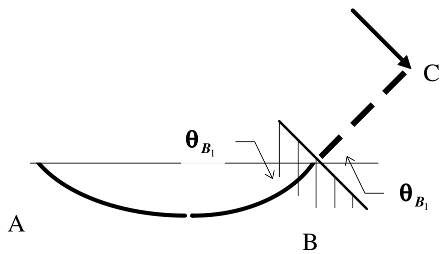
因 B 點無外力矩或反力矩作用。

先考慮AB段，分佈負荷與彎矩作用，使B點產生一斜率 θ_{B_1}；

$$\theta_{B_1} = \overbrace{\theta_{B_{11}}}^{\text{力產生的斜率}} + \overbrace{\theta_{B_{12}}}^{\text{彎矩產生的斜率}}$$

$$= \frac{q_0L^3}{6EI} - \frac{(PL/4)L}{EI}$$

$$= \frac{q_0L^3}{6EI} - \frac{PL^2}{4EI}$$



C點因 θ_{B_1} 產生向上位移 δ_{C_1}；但又由集中力作用產生向下位移。

$$\delta_C = \overbrace{\delta_{C_1}}^{\text{斜率}\theta_{B1}\text{產生的位移}} + \overbrace{\delta_{C_2}}^{\text{集中力產生的位移}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{q_0L^3}{6EI} - \frac{PL^2}{4EI}\right)}_{\theta_{B1}} \cdot \frac{L}{\underbrace{2}_{\text{懸臂長}}} - \frac{(P/2)L^3}{3EI}$$

$$= \frac{q_0L^4}{12EI} - \frac{PL^3}{12EI}$$

【特殊值】

若 $P = q_0L$

$$\theta_C = 0$$

位移曲線示意圖