第五章　撓曲應力

一、撓曲應變
二、斷面正應力
三、斷面慣性矩
四、斷面剪應力
五、剪力流
六、合成斷面的應力

一、撓曲應變

(一)撓曲應變的假設

假設：

1.對稱直樑

斷面至少有一對稱軸。

2.純彎矩彎曲

斷面上僅有彎矩作用。

3.對稱彎曲

彎矩指向垂直於對稱軸

結果：

樑受正彎矩作用時產生凹面向上的彎曲。樑的頂部縮短，底部伸長。撓曲後斷面仍保持為平面，無翹曲。

（二）中性軸與中性面

曲面向上撓曲的直樑，頂部的直線縮短，底部的直線伸長。伸長量由負到正間必存在一伸長量為零的直線。此直線的位置稱為中性軸(neutral axis)；中性軸所在垂直於對稱軸的平面稱為中性面(neutral surface)。在中性面上的直線撓曲時應變量為零。

(三)撓曲的應變分佈

撓曲時長軸方向的應變：

樑之原長為 L，受正彎矩作用而彎曲，若曲率半徑為ρ，撓曲角為θ。在距離中性軸上 y 的一長軸縮短為 L'。樑表面與中性軸最大距離為 c（可能在頂不在底部）。

$$L = \rho\theta$$

$$L' = (\rho - y)\theta$$

變形量：

$$\delta = L' - L$$

$$= -y\theta$$

應變：

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$= -\frac{y}{\rho}$$

最大應變：

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho}$$

c 為最遠距離

應變分佈：

$$\varepsilon = -\frac{y}{c}\varepsilon_{max} \qquad cf.\ \ \gamma = \frac{r}{R}\gamma_{max}$$

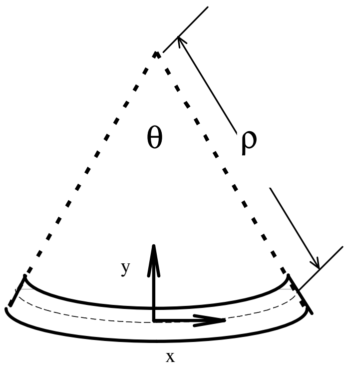
（四）曲率半徑

假設：

1.細長的樑；曲率半徑很大。

2. $\varepsilon_x >> \varepsilon_y$;
$\varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \rightarrow 0$

若 u,v 分別為 x,y 方向的位移；



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\because \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \therefore v = f(x)$$

$$\because \gamma_{xy} = 0, \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$u = -y\frac{\partial v}{\partial x} + u_0$$

$$\frac{u - u_0}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_x = -y\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

曲率(curvature: κ)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 v / \partial x^2}{\left[1 + \underbrace{\left(\partial v / \partial x\right)^2}_{\downarrow\, 0}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \kappa \cong \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\therefore \varepsilon_x = -y\kappa$$

$$= -\frac{y}{\rho}$$

二、斷面正應力

(一)正應力分佈

假設：

1.彈性材料。

2.變形在比例限內。

3.伸長與縮縮的彈性係數相同。

由應變分佈

$$\varepsilon = -\frac{y}{c}\varepsilon_{max}$$

$$E\varepsilon = -E\frac{y}{c}\varepsilon_{max}$$

斷面正應力分佈：

$$\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{max}$$

(二)中性面位置

$$\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{max}$$

斷面合力：F

因斷面上僅有彎矩作用 $\therefore F = 0$

$$F = \int_A \sigma dA$$

$$= \int_A -\frac{y}{c}\sigma_{max} dA$$

$$= -\frac{\sigma_{max}}{c}\int_A y dA$$

$$\therefore \int_A y dA = 0$$

因此：中性面通過形心。

（三）彈性撓曲公式

elastic flexure formulas

$$M=\int -y\sigma dA$$
$$=\int -y\left(-\frac{y}{c}\sigma_{max}\right)dA$$
$$=\frac{\sigma_{max}}{c}\int y^2 dA$$
$$=\frac{\sigma_{max}}{c}I$$

其中：

$$I=\int y^2 dA$$

I 為斷面對於中性軸的慣性矩

最大正應力：

$$\sigma_{max}=\frac{Mc}{I}$$
$$\sigma_x=-\frac{My}{I}$$

定義彈性斷面模數

(elastic section modulus):S

$$S\equiv\frac{I}{c}$$

則 $\sigma_{max}=\dfrac{M}{S}$

附註：

直樑受剪力作用時，斷面產生翹曲，撓曲公式並不成立。但因其影響很小，可以忽略。故撓曲公式可以用於任何負荷作用於對稱面的細長元件。

（四）撓曲角

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\varepsilon_{max}}{c}$$

$$=\frac{\sigma_{max}}{Ec}$$

$$=\frac{1}{Ec}\frac{Mc}{I}$$

$$=\frac{M}{EI}$$

在中性面上

$$L=\rho\theta$$

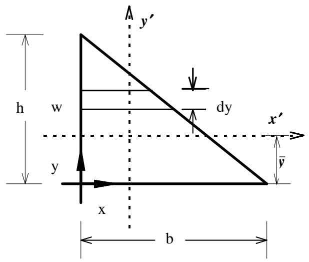
$$\therefore\theta=\frac{ML}{EI}$$

三、斷面慣性矩

moment of inertia

斷面慣性矩必須對某一特定軸而言。

（一）直角三角形



對於底邊取慣性矩：

$$I_x\equiv\int_A y^2dA$$

$$=\int y^2wdy$$

$$=\int_0^h y^2\left(b\frac{h-y}{h}\right)dy$$

$$=\frac{1}{12}bh^3$$

對於通過形心的軸取慣性矩：

$$I_c \equiv \int_A y^2 dA$$

$$= \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} y^2 \left(b \frac{\frac{2}{3}h - y}{h} \right) dy$$

$$= \frac{1}{36} bh^3$$

（二）平移公式

若 $\overline{y}$ 為中性軸與底邊（x 軸）的距離

以 x', y' 為座標

$$I_c = \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_A \left(y + \overline{y} \right)^2 dA$$

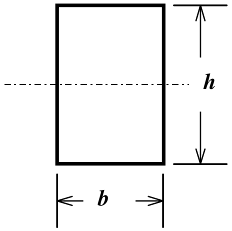
$$= \int_A y^2 dA + \overline{y}^2 \int_A dA + \underbrace{2\overline{y} \int_A y dA}_{\Downarrow \atop 0}$$

$$= I_c + \overline{y}^2 A$$

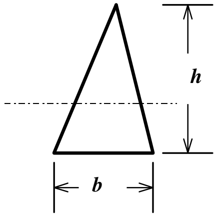
（三）常見幾何形狀的斷面慣性矩

對形心軸（中性軸）的慣性矩

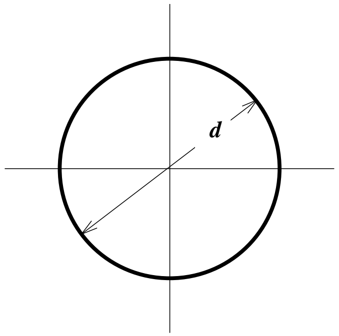
1.矩形



$$I = \frac{1}{12} bh^3$$



$$I = \frac{1}{36} bh^3$$



$$I = \frac{1}{64}\pi d^4$$

$$= \frac{1}{4}\pi R^4$$

（四）組合斷面的斷面慣性矩

計算程序：

1.先求組合斷面的形心軸。

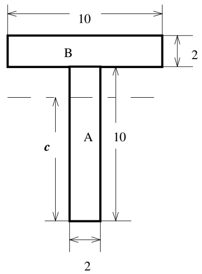
2.求各組合元素對其形心軸的斷面慣性矩。

3.以平移公式將上述的慣性矩轉換成對組合件形心軸的慣性矩。

4.將各元素的慣性矩合計。

《例題》

求下列斷面的斷面慣性矩



單位：cm

【解】

1.先求形心：

$$c(2\cdot 10+10\cdot 2)=5\cdot(2\cdot 10)+(10+1)(10\cdot 2)$$

$\therefore c=8$

距離底邊 $8\,cm$

2.對整體的形心軸慣性矩

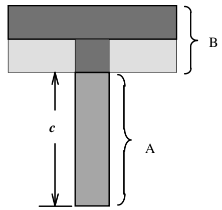
(1)用合成：

$$I=\underbrace{\frac{1}{12}2\cdot 10^3}_{A\text{對其形心的慣性矩}}+\underbrace{(\overbrace{2\cdot 10}^{A\text{的面積}})(\overbrace{8-5}^{\text{平移量}})^2}_{\text{平移公式}}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{12}10\cdot 2^3}_{B\text{對其形心的慣性矩}}+\underbrace{(\overbrace{10\cdot 2}^{B\text{的面積}})(\overbrace{11-8}^{\text{平移量}})^2}_{\text{平移公式}}$$

$\therefore I=533cm^4$

用扣除：



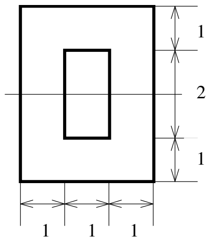
$$I=\underbrace{\frac{1}{36}2\cdot 8^3}_{A\text{對整體形心軸的慣性矩}}+\underbrace{\frac{1}{36}10\cdot(2+2)^3}_{B\text{對整體形心軸的慣性矩}}$$

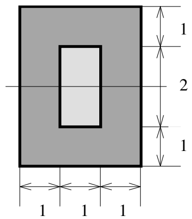
$$-\underbrace{\frac{1}{36}(10-2)\cdot 2^3}_{\text{淡色部份對整體形心軸慣性矩}}$$

$$\therefore I=533cm^4$$

《例題》

求下列斷面的斷面慣性矩





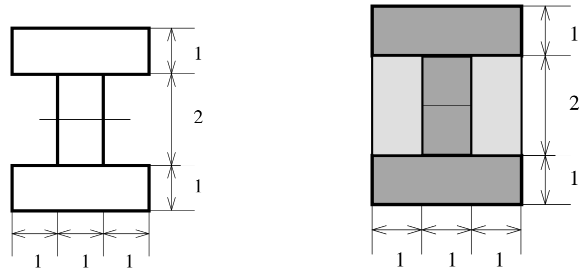
單位：***cm***

$$I = \frac{1}{12}3\cdot 4^3 - \frac{1}{12}1\cdot 2^3$$

$$= 15\,{}^{1}\!/_{3}\,cm^3$$

《例題》

求下列斷面的斷面慣性矩



單位：***cm***

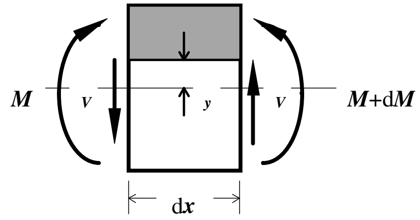
$$I = \frac{1}{12}(3 \cdot 4^3) - \frac{1}{12}\left(2 \cdot 2^3\right)$$

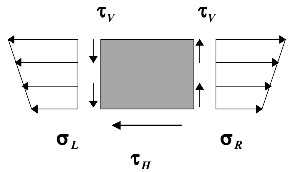
$$= 14\tfrac{2}{3}$$

四、斷面剪應力

（一）剪應力公式

取樑的一小段





水平方向的剪力 F_H ：

$$F_H = \int_x^{x+dx} \tau_H t dx$$

$$= \int_y^c \sigma_R dA - \int_y^c \sigma_L dA$$

$$= \int_y^c - \frac{(M+dM)y}{I} - \int_y^c - \frac{My}{I}$$

$$= -\frac{dM}{I}\int_y^c y dA$$

$$\because -V = \frac{dM}{dx};$$

若定義 $Q \equiv \int_y^c y dA$

$$F_H = \frac{Vdx}{I} Q$$

Q 為面積對形心軸的一次矩(first moment of the area with respect to neutral axis)

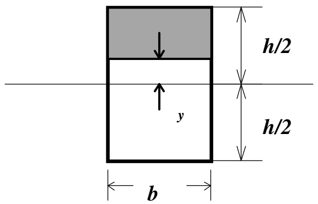
假設 τ_H 在厚度（t）方向均勻分佈

（實際上外側較大）

$$\tau_H dx \cdot t = \frac{Vdx}{I} Q$$

$$\tau_H = \tau_V = \frac{VQ}{It}$$

（二）矩形斷面的剪應力分佈



剪應力公式：

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{12}bh^3$$

$$t = b$$

剪應力：

$$\tau = \frac{3V\left(h^2 - 4y^2\right)}{2bh^3}$$

或寫成

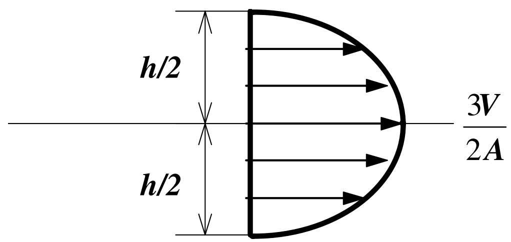
$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

特殊值：

$$y = \frac{h}{2}; \quad \tau = 0$$

$$y = 0; \quad \tau = \tau_{max} = \frac{3V}{2A}$$

剪應力分佈圖：



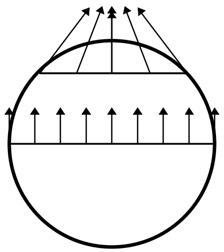
p.287, fig 5.35

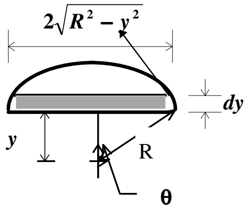
（三）圓形斷面的剪應力分佈

特點：

1.剪應力與斷面的表面相切。

2.再一水平面上剪應力的垂直分量相同。





$$Q=\int_y^R 2y\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

$$=\frac{2}{3}\left(R^2-y^2\right)^{3/2}$$

$$I=\frac{\pi R^4}{4}$$

$$t=2\sqrt{R^2-y^2}$$

剪應力 y 方向的分量：

$$\tau_y=\frac{VQ}{It}$$

$$=\frac{4V}{3\pi R^4}\left(R^2-y^2\right)$$

剪應力：

$$\tau=\tau_y/\cos\theta$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\tau_y$$

$$=\frac{4V}{3\pi R^3}\sqrt{R^2-y^2}$$

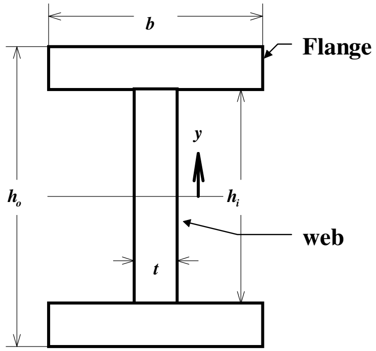
特殊值:

$$y=\pm R;\quad \tau=0$$

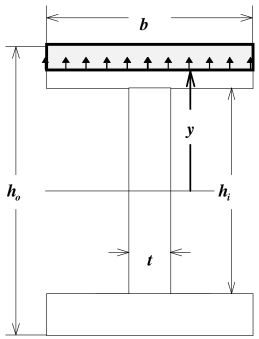
$$y=0;\quad \tau=\tau_{max}$$

$$=\frac{4V}{3A}$$

（四）組合元件的剪應力分佈



凸緣(flange)部份



$$y \geq \frac{h_i}{2}$$

$$Q = b\left(\frac{h_o}{2} - y\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h_o}{2} + y\right)\right]$$

$$t = b$$

$$I = \frac{1}{12} b h_o^3 - \frac{1}{12}(b - t)(h_o - h_i)^3$$

$$= \frac{1}{12}\left[b h_o^3 - (b - t)(h_o - h_i)^3\right]$$

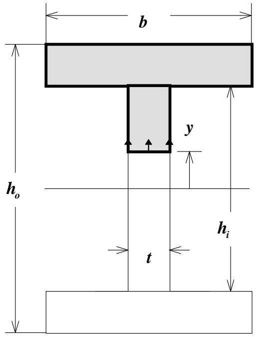
$$\tau_{zy} = \frac{VQ}{It}$$

$$= \frac{V}{8I}\left(h_o^2 - 4y^2\right)$$

$$\because I >> 0;\ y \approx \frac{1}{2} h_o$$

所以 τ_{zy} 的數值很小。

(2)腹部(web)



$$y \le \frac{h_i}{2}$$

$$Q = b\left(\frac{h_o}{2} - \frac{h_i}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h_o}{2} + \frac{h_i}{2}\right)\right]$$

$$+ t\left(\frac{h_i}{2} - y\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2} + y\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[b\left(h_o^2 - h_i^2\right) + t\left(h_i^2 - 4y^2\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{12} b h_o^3 - \frac{1}{12}(b-t)(h_o - h_i)^3$$

$$= \frac{1}{12}\left[b h_o^3 - (b-t)(h_o - h_i)^3\right]$$

寬度 $t = t$

$$\tau_{zy} = \frac{VQ}{It}$$

$$= \frac{V}{8It}\left[b\left(h_o^2 - h_i^2\right) + t\left(h_i^4 - 4y^2\right)\right]$$

特殊值:

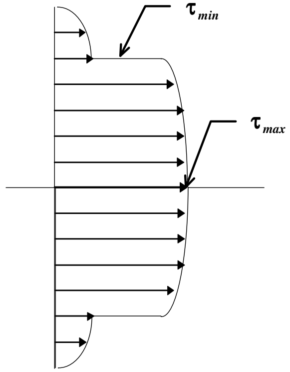
$$y = 0; \quad \tau_{zy} = \tau_{max}$$

$$= \frac{V}{8It}\left[b\left(h_o^2 - h_i^2\right) + h_i^2 t\right]$$

$$y = \frac{h_i}{2}; \quad \tau_{zy} = \tau_{min}$$

$$= \frac{V}{8It} b\left(h_o^2 - h_i^2\right)$$

剪應力分佈圖



腹部的剪力：

$$V_{web}=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{-\frac{h_i}{2}}\tau t dy$$

$$=\frac{h_i t}{3}\left(2\tau_{max}+\tau_{min}\right)$$

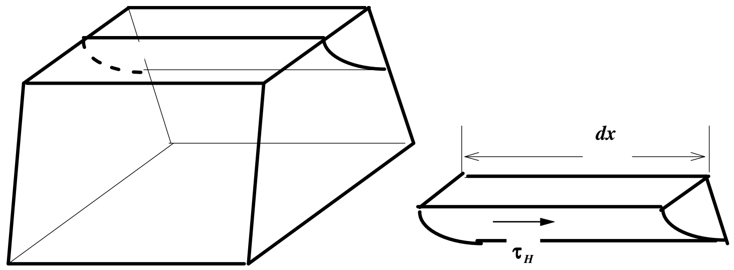
平均剪應力：

$$V_{web}\cong 0.9-0.98V$$

$$\therefore \tau_{avg}\cong\frac{V}{h_i t}$$

五、剪力流

（一）平均剪應力與剪力流



剪力流(shear flow)***q*:**

剪力流為單位長度的剪力，單位 N/m。

$$q=\tau_H w(x)$$

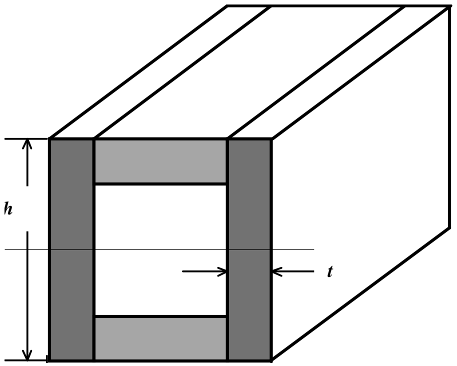
其中 *w(x)*為斷面寬度

$$\because \tau_H dA=F_H=\frac{Vdx}{I}Q$$

剪力流公式：

$$q=\frac{VQ}{I}$$

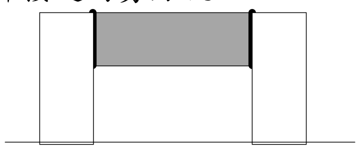
（二）接合面的剪應力



斷面慣性矩：

$$I=\frac{1}{12}\left(bh^3-(b-2t)(h-2t)^3\right)$$

上部橫元件接縫的剪力流：

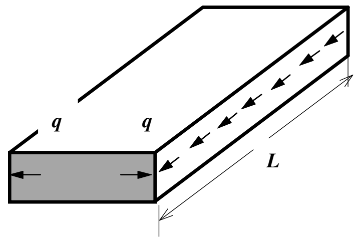


$$Q=(b-2t)t\left(\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+\left(\frac{h}{2}-t\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}t(b-2t)(h-t)$$

接縫有兩邊；每一邊的剪力流為

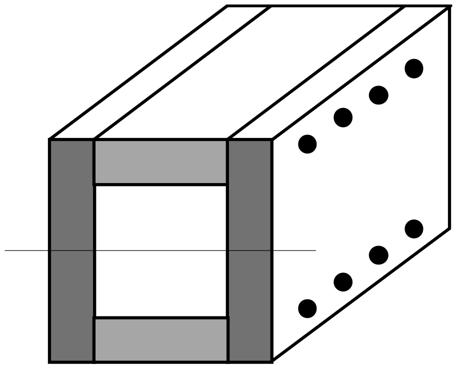
$$q=\frac{1}{2}\frac{VQ}{I}$$



若為膠合面；膠合面的剪力V_G

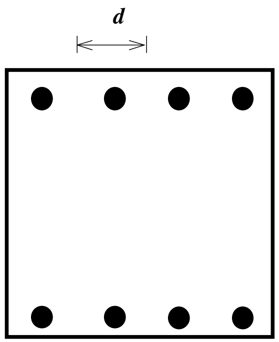
$$V_G=qL$$

若以釘結合；每支釘的剪力：



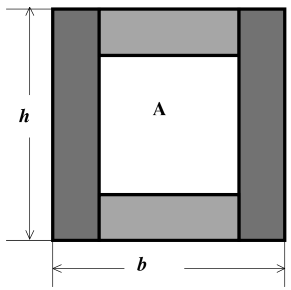
$$V_N = qd$$

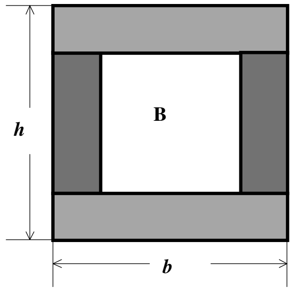
其中為兩支釘子間的距離。



《例題》

以厚度相同的木板結合成一方槽，受斷面剪力時那一種結合較佳？





接縫的剪力流

$$q_A = \frac{V(b-2t)t\left(\frac{1}{2}(h-t)\right)}{2I}$$

$$q_B = \frac{Vbt\left(\frac{1}{2}(h-t)\right)}{2I}$$

$$q_A < q_B$$

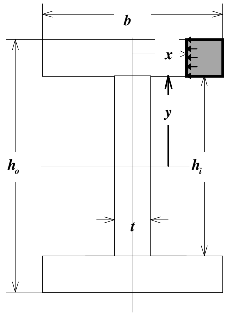
所以（A）的接合較佳。

（三）薄壁元件的剪力流

工字樑凸緣在 X 方向寬度寬，剪應力 τ_{zy} 小； Y 方向寬度窄，

剪應力 τ_{zx} 大。剪力流應以 X 方向為主。

凸緣的剪力流：



$$Q = \left(\frac{b}{2} - x\right)\frac{1}{2}\left(h_o - h_i\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h_0}{2} + \frac{h_i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(b - 2x\right)\left(h_0^2 - h_i^2\right)$$

$$I = \frac{1}{12}bh_o^3 - \frac{1}{12}\left(b - t\right)\left(h_o - h_i\right)^3$$

$$= \frac{1}{12}\left[bh_o^3 - \left(b - t\right)\left(h_o - h_i\right)^3\right]$$

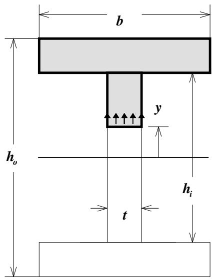
$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$= \frac{V}{16I}\left[\left(b - 2x\right)\left(h_o^2 - h_i^2\right)\right]$$

在 $x=0$ 時

$$q = \frac{V}{16I}b\left(h_o^2 - h_i^2\right)$$

腹部的剪力流：



$$Q = b\left(\frac{h_o}{2} - \frac{h_i}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h_o}{2} + \frac{h_i}{2}\right)\right]$$
$$+ t\left(\frac{h_i}{2} - y\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2} + y\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[b\left(h_o^2 - h_i^2\right) + t\left(h_i^2 - 4y^2\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{12}bh_o^3 - \frac{1}{12}(b-t)(h_o - h_i)^3$$

$$= \frac{1}{12}\left[bh_o^3 - (b-t)(h_o - h_i)^3\right]$$

剪力流

$$q = \frac{VQ}{I}$$
$$= \frac{V}{8I}\left[b\left(h_o^2 - h_i^2\right) + t\left(h_i^2 - 4y^2\right)\right]$$

在 $y = \dfrac{h_i}{2}$ 時

$$q = \frac{V}{8I}b\left(h_o^2 - h_i^2\right)$$

薄壁元件剪力流特性：

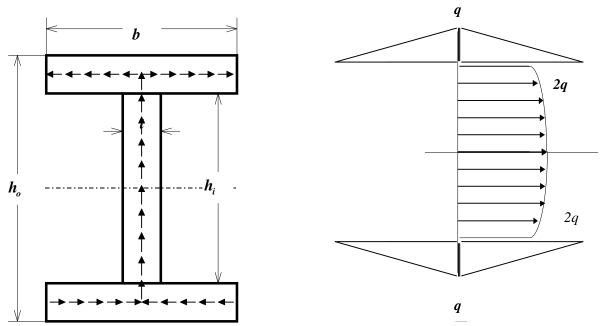
(1)剪力流起於流源(source)，集於流匯(sink)。在流源與流匯上為零。

(2)合流為各合成支流的代數和。

(3)總向量和的方向為斷面剪力的方向。

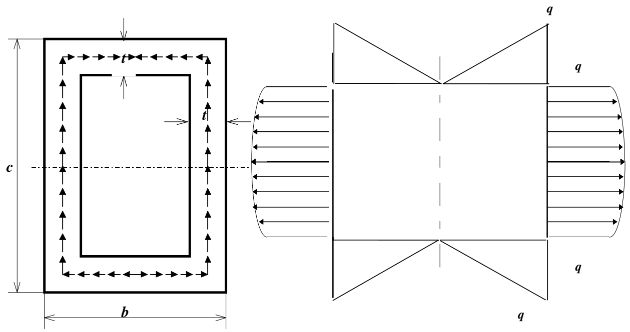
《例題》

工字樑的剪力流（斷面剪力方向向上）



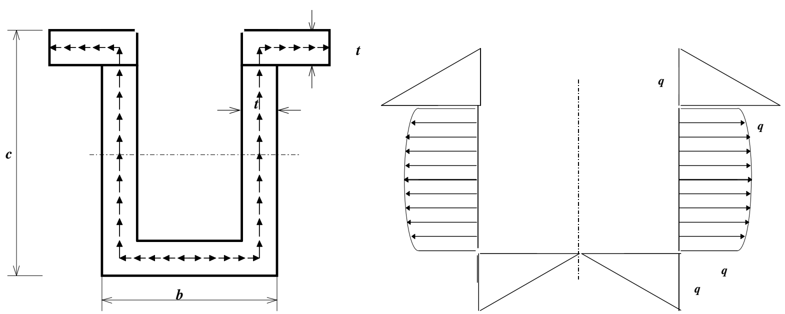
《例題》

方槽的剪力流（斷面剪力方向向上）



《例題》

凹槽的剪力流（斷面剪力方向向上）



六、合成斷面的應力

合成樑其斷面由不同材料組成，因彈性模數不同，而造成應力不同的分佈。

(一） 斷面正應力

斷面的彎矩造成斷面正應力

$$
\begin{aligned}
M &= \int y\sigma dA \\
&= \int E\varepsilon y dA \\
&= -\int E\frac{y^2}{c}\varepsilon_{max} dA
\end{aligned}
$$

取組成斷面之一種材料的彈性模數E_r為參考值。定義其他材料的彈性模數E；

$$E = nE_r$$

$$
\begin{aligned}
M &= -\int E\frac{y^2}{c}dA \\
&= -\int nE_r\frac{y^2}{c}\varepsilon_{max}dA \\
&= -\frac{E\varepsilon_{max}}{c}\int ny^2 dA \\
\therefore \quad &= -\sigma_{r_{max}}\int y^2(nw)dy
\end{aligned}
$$

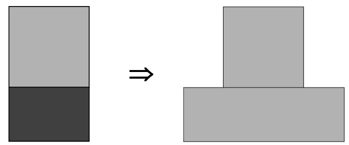
其中: $\sigma_{r_{max}}$ 是將材料視為全由參考材料組成時

的最大正應變。

定義I_N:

$$I_N = \int y^2(nw)dy$$

I_N是將材料視為參考材料，調整斷面寬度所形成新斷面的斷面慣性矩。



$$\sigma_{r_{max}} = -\frac{Mc}{I_N}$$

$$\because \varepsilon = \frac{\varepsilon_{max}y}{c} \;;\; \sigma_r = E_r\varepsilon$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{My}{I_N}$$

調整回原來材料時，撓曲公式變成:

$$\because \sigma = E\varepsilon$$

$$\therefore \sigma = -n\frac{My}{I_N}$$

又因

$$
\begin{aligned}
F = 0 &= \int \sigma dA \\
&= \int n\sigma_r dA \\
&= -\frac{\sigma_{r_{max}}}{c}\int nwydy
\end{aligned}
$$

$$\therefore \int (nw)ydy = 0$$

所以中性面(中性軸)通過調整後斷面的形心。

（二）斷面剪應力

斷面剪力 F_H

$$F_H = \int_y^c \sigma_L dA - \int_y^c \sigma_R dA$$

$$= \int_y^c \Delta\sigma dA$$

$$= \int_y^c n\frac{ydM}{I_N}dA$$

$$= \frac{dM}{I_N}\int_y^c nwydy$$

定義: $Q_N = \int_y^c nwydy$

Q_N 是調整寬度斷面面積對中性軸的一次矩。

$$\therefore F_H = \frac{Vdx}{I_N}\cdot Q_N$$

因此剪力流 q：

$$q = \frac{VQ_N}{I_N}$$

斷面剪力 τ：

$$\tau = \frac{VQ_N}{I_N \underbrace{t}_{\text{原來寬度}}}$$