第三章　扭轉

Torsion

一、圓桿的扭轉應變
二、彈性圓桿的扭轉應力
三、扭轉角
四、靜不定軸
五、相對扭轉
六、軸的動力輸送

一、圓桿的扭轉應變

（一）扭轉變形

1.扭轉的定義：

偶矩作用於元件上，使元件上的點，以長軸為旋轉中心，產生轉動的位移。

此種偶矩稱為扭矩(Torque, Twisting couples Twisting moment)。

2.圓桿(Circular bars)：

垂直於長軸之截面為圓形或同心環形的元件。

特點：截面為軸對稱(Axisymmetric)，對著對稱軸旋轉任何角度時，形狀不變。

3.圓桿扭轉變型的特性

(1)扭轉後截面仍保持為平面，無翹曲(warped)現象。

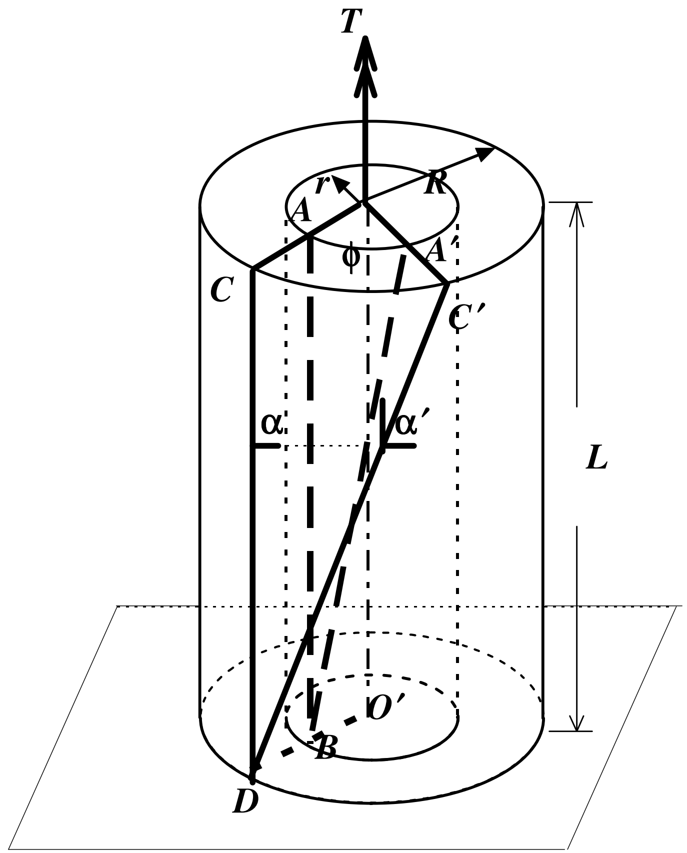
(2)截面上之直徑扭轉後仍保持為直線。

（二）扭轉應變 (Torsional strain)

1.定義

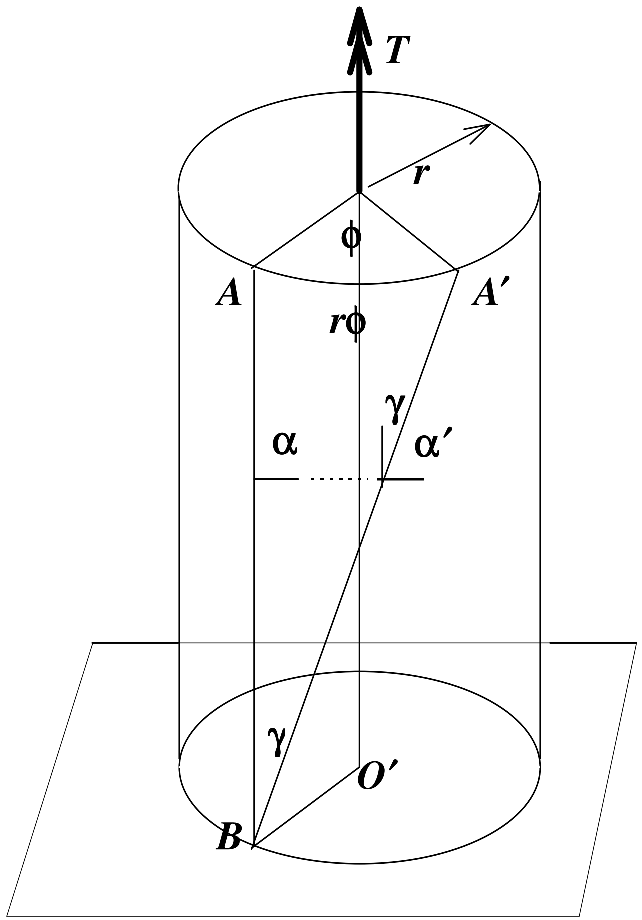
扭轉應變是一種剪應變。

圓桿圓桶面上垂直的兩條線段，受扭轉變形後角度的改變量為扭轉應變。



2.應變量

一圓桿長為 L，一端固定，另一端上有扭矩 T 作用。作用前圓桿內有一平面 *OACDBO′*，扭轉後成為 *OA′C′DBO′*。其中 *OO′* 為長軸，斷面的圓心在長軸上。*OAC* 與 *O′BD* 分別為在受力面與固定面的半徑，*OAC* 經扭轉後達到 *OAC′* 位置。$\angle COC' = \phi$ 稱為扭轉角。



在 AB 桶面上，

剪應變（γ）：

桶面上變形前的一個垂直角 $\angle\alpha$ ，應變後變成 $\angle\alpha'$

$$\gamma = \angle\alpha - \angle\alpha'$$

$$\gamma \cong \tan\gamma$$

$$\cong \frac{r\phi}{L}$$

將 $r \rightarrow R$

在 CD 桶面上，剪應變為最大值：γ_{max}

$$\gamma_{max} \cong \frac{R\phi}{L}$$

$$\therefore \gamma = \gamma_{max}\frac{r}{R}$$

二、彈性軸的扭轉應力

(一)扭轉應力

Torsional Stress

1.扭轉應力在斷面的分佈：

扭轉應變在圓斷面的變化：

$$\gamma = \gamma_{max}\frac{r}{R}$$

$$G\gamma = G\gamma_{max}\frac{r}{R}\ ;$$

G= shear modulus

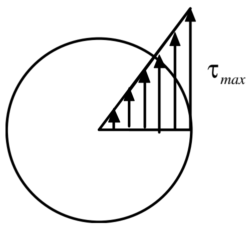
由 Hook 定理

$$\tau = G\gamma$$

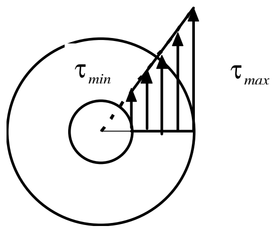
$$\therefore \tau = \tau_{max}\frac{r}{R}$$

所以扭轉應力在斷面上隨半徑增加做線性變化，
在最外層時為最大值。

2.剪應力分佈圖



實心軸的剪應力分佈

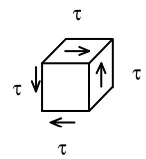


空心軸的剪應力分佈

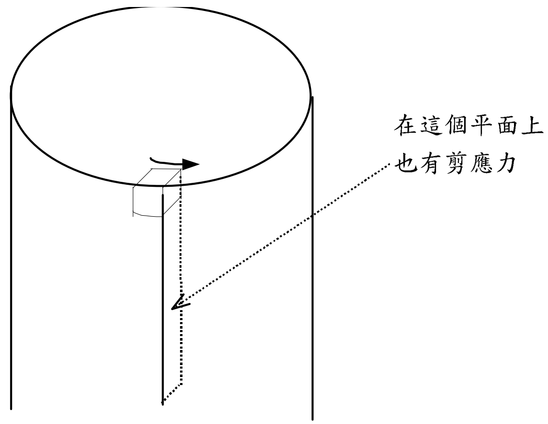
3.圓桿其他斷面的剪應力

雖然在此僅討論斷面的剪應力，但是因為剪應力的對稱性；

一點的純剪應力：



扭轉時圓桿的斷面上有剪力存在，在與斷面垂直的面上也有對應的剪應力存在。



（二）扭轉公式

Torsion Formula

1.斷面剪應力

單位面積的斷面扭矩 $=$

作用力矩*斷面剪應力

$$\therefore \int_0^R r\tau dA = T$$

$$T = \int_0^R r\tau_{max}\left(\frac{r}{R}\right)dA$$

$$= \frac{\tau_{max}}{R}\int_0^R r^2 dA$$

$$= \frac{\tau_{max}}{R}\cdot J$$

其中

$$J \equiv \int_0^R r^2 dA$$

$$\text{單位} = L^4$$

J 為面積極慣性矩 (Polar moment of inertia)

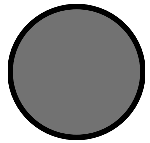
又因 $\tau_{max} = \tau\dfrac{R}{r}$

$$\therefore \tau = \frac{Tr}{J}$$

2.面積極慣性矩

(1) 圓面：

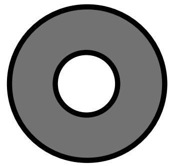
半徑 R



$J = \dfrac{\pi}{2}R^4 = \dfrac{\pi}{32}D^4$ $D=2R$

(2) 環面：

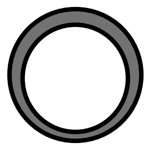
外圓半徑 R_o ；內外圓半徑 R_i



$$J = \frac{\pi}{2}\left(R_0^4 - R_i^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(D_0^4 - D_i^4\right)$$

(3) 薄環面:

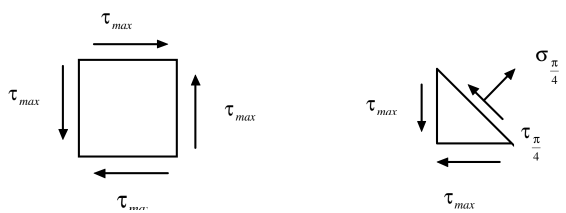
平均半徑 R ；環厚 t



$$J \cong 2\pi R^3 t = \frac{\pi D^3 t}{4}$$

（三）扭轉破壞

若元件上一只受剪應力 τ_{max} 的點



在其 45 度的斜面上

由靜力平衡得

$$\tau_{\frac{\pi}{4}} = 0$$

$$2\tau_{max}\cos\frac{\pi}{4}\cdot A_0 = \sigma_{\frac{\pi}{4}} A_0 \Big/ \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \sigma_{\frac{\pi}{4}} = \tau_{max}$$

$$= \frac{TR}{J}$$

在 45 度面上受最大張力或壓力

三、扭轉角

（一）扭轉角公式

由剪應變與扭轉角幾何關係：

$$\gamma_{max} = \frac{R\phi}{L}$$

由 Hook 定理：

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$$

由扭轉公式：

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

綜合而得：

$$\therefore \phi = \frac{TL}{GJ}$$

（二）扭轉角積分公式

多段變化的圓桿

$$\sum \phi = \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

寫成積分式

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{G(x)J(x)}$$

(三)扭轉角圖

與軸向負荷相同的，圓桿的扭轉可繪製負荷分佈圖、扭矩分佈圖（內力分佈圖）、應力分佈圖、扭轉角圖（位移圖）。

1.負荷分佈圖：

由自由體圖與靜力平衡計算反扭矩；將作用力矩與反力矩繪成負荷分佈圖。

符號規則：反力矩指向向右為『+』；

反力矩指向向左為『-』。

2.斷面扭矩分佈圖：

將元件分段取自由體圖，計算出每段斷面的扭矩，整理畫成扭矩分佈圖。

(1)符號規則：

正斷面（平面指向為右的斷面）指向向右的扭矩（逆時針方向）為『+』；反之為『-』。

負斷面（平面指向為左的斷面）指向向左的扭矩為（順時針方向）『+』；反之為『-』。

(2)負荷分佈圖與扭矩分佈圖關係

i.扭矩抵銷集中負荷。

ii.扭矩是負荷的積分；負荷分佈圖是扭矩分佈圖的『負』斜率分佈圖。

iii.自由端的淨扭矩為『0』。

3.最大剪應力分佈圖：

將扭矩分佈圖乘以該位置的半徑 R;除以該位置的截面積極慣性矩即為最大剪應力分佈圖。

(1)符號規則：

正斷面（平面指向為右的斷面）指向向右的剪應力（逆時針方向）為『+』；反之為『-』。

負斷面（平面指向為左的斷面）指向向左的剪應力為（順時針方向）『+』；反之為『-』。

。

（2)最大剪應力分佈圖與扭矩分佈圖關係

若元件的截面積固定，則剪應力分佈圖與扭矩分佈圖，形狀相同，只是單位不同。

4.扭轉角圖

將元件各段利用扭轉公式計算出的扭轉量，以一端為參考點，累計畫成扭轉角圖。

(1)符號規則：

對參考點逆時針旋轉為『+』；順時針旋轉為『-』。

(2)扭轉角圖與剪應力分佈圖關係

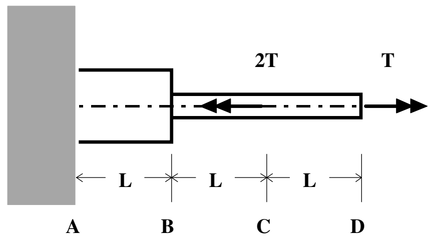
若元件彈性係數固定

扭轉角是剪應力分佈圖的積分；剪應力分佈圖是扭轉角圖的斜率分佈圖。

(3)參考點（固定端）的扭轉角為『0』。

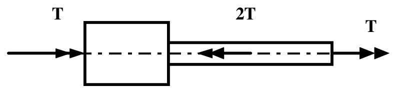
《例題一》

有一不等直徑的圓桿固定於 A 端，AB 段的直徑為 $\boldsymbol{R}_1$，極慣性矩為 $\boldsymbol{J}_1$；BD 段的直徑為 $\boldsymbol{R}_2$，極慣性矩為 $\boldsymbol{J}_2$。在 C 點與 D 點分別有扭矩 2T（指向左）與 T（指向右）作用。求在 D 點之扭轉角；並畫出負荷圖、扭矩圖、最大斷面剪應力圖與扭轉角圖。

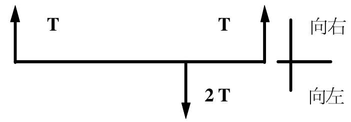


【解法一】

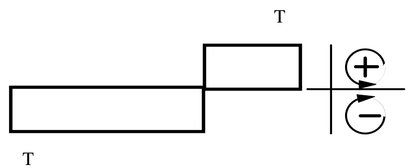
求 A 點的反扭矩：



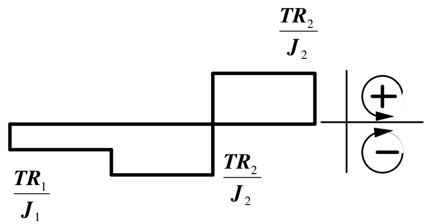
負荷分佈圖：



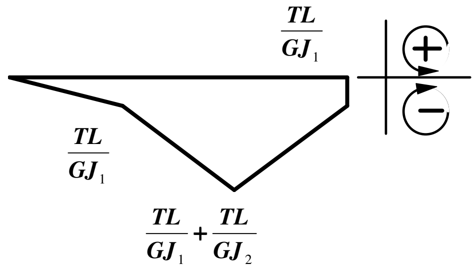
斷面扭矩分佈圖（內力分佈圖）



斷面最大剪應力圖：



扭轉角圖：



扭轉角大小

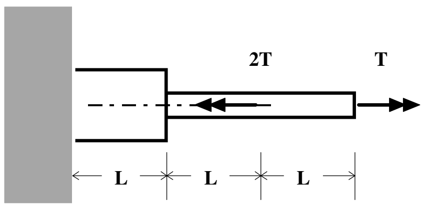
$$\phi=-\frac{TL}{GJ_1}-\frac{TL}{GJ_2}+\frac{TL}{GJ_2}$$

$$=-\frac{TL}{GJ_1}$$

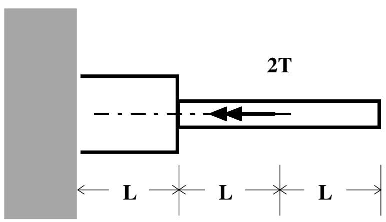
順時鐘旋轉 $\frac{TL}{GJ_1}$

【解法二】

利用重疊法分解成（1）與（2）兩部份

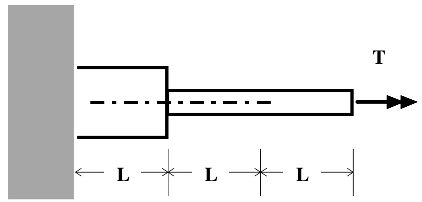


（1）



$$\phi_1 = -\frac{2TL}{GJ_1} - \frac{2TL}{GJ_2}$$

（2）



$$\phi_2 = \frac{TL}{GJ_1} + \frac{2TL}{GJ_2}$$

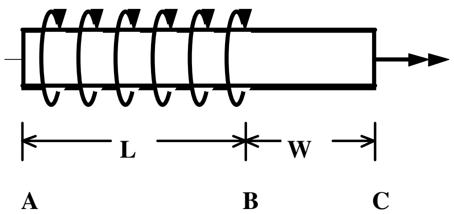
將（1）與（2）相加得

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ &= -\frac{2TL}{GJ_1} - \frac{2TL}{GJ_2} + \frac{TL}{GJ_1} + \frac{2TL}{GJ_2} \\ &= -\frac{TL}{GJ_1}\end{aligned}$$

順時鐘旋轉 $\frac{TL}{GJ_1}$

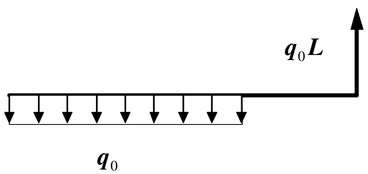
《例題二》馬達的扭轉角

馬達的轉動軸 AC，AB 代表由磁場產生扭矩的電樞部分，長度為 L。與 B 距離 W 處 C 點上有一皮帶輪拉動負荷。若電樞產生均勻扭矩 q_0，求 C 點對 A 點的扭轉角。

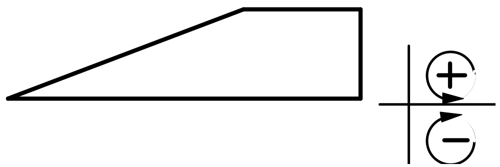


【解】

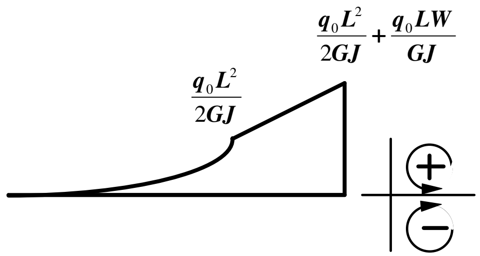
負荷分佈圖：



斷面扭矩分佈圖：



扭轉角圖：



扭轉角：

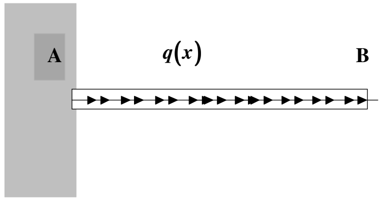
$$\phi = \int_0^{L+W} \frac{\tau(x)dx}{G(x)J(x)}$$

$$\underbrace{\int_0^L \frac{q_0xdx}{GJ}}_{\text{電樞段}} + \underbrace{\int_L^{L+W} \frac{q_0Ldx}{GJ}}_{\text{凸出段}}$$

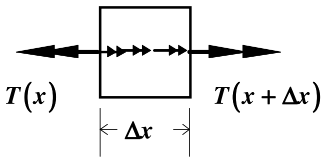
$$= \frac{q_0L^2}{2GJ} + \frac{q_0LW}{GJ}$$

（四）扭轉角的微分式

一圓桿上有分佈扭矩 $q(x)$



取一小段距離 A 點 x，寬度 Δx



由靜力平衡得

$$T(x+\Delta x)+q(x)\Delta x=T(x)$$

若 Δx 很小

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x}+q(x)=0$$

$$\frac{dT}{dx}+q(x)=0$$

由扭轉角公式：

$$\frac{d\phi}{dx}=\frac{T}{GJ}$$

代入上式得

$$\frac{d}{dx}\left(GJ\frac{d\phi}{dx}\right)+q(x)=0$$

若 GJ 為定值，可寫成

$$GJ\phi''=-q(x)$$

邊界條件：

扭轉角的邊界條件：

在固定端為零，例如在參考點或原點

$$\phi(0)=0$$

外力的邊界條件，只能用一個

$$GJ\phi'(0)=T(0)=-T_0$$ 或

$$GJ\phi'(L)=T(L)=T_L$$

$T(0),T(L)$ 分別表示作用於原點與 L 位置正斷面的扭矩（內力:指向與斷面方向相同為正）

T_0,T_L 分別表示作用於原點與 L 位置扭矩（外力：以指向右為正）。

四、。靜不定圓桿

（一）同心圓桿

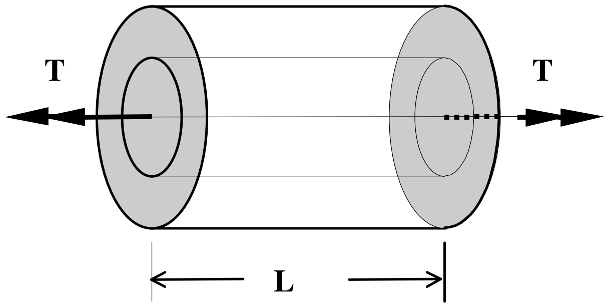
同心圓桿是有共同對稱軸的多層圓桿，每一層可用不同的材料，或有不一樣的截積。

特點：

同心圓桿扭轉時，同一斷面各層的扭轉角相同。

《例題》

一雙層的同心圓桿長度為 L，內外層的極慣性矩分別為 J_i, J_o；剪彈性係數分別為 G_i, G_o。圓桿對稱軸上有一扭矩 T 作用，求各層的最大剪應力。



設內外層所受的扭矩分別為 T_i, T_o。

$$T_i + T_o = T$$

若內層的扭轉角為 ϕ_i；外層的扭轉角為 ϕ_{0i}

則

$$\phi_i = \frac{T_i L}{G_i J_i}\ ; \qquad \phi_o = \frac{T_o L}{G_o J_o}\ ;$$

由同心圓桿的幾何特性

$$\phi_o = \phi_i$$

聯立得

$$\begin{cases} \dfrac{T_o}{G_o J_o} = \dfrac{T_i}{G_i J_i} \\ T_o + T_i = T \end{cases}$$

解得

$$T_i = \frac{G_o J_i}{G_i J_i + G_o J_o} T$$

$$T_o = \frac{G_o J_o}{G_i J_i + G_o J_o} T$$

扭轉角

$$\phi = \phi_i = \phi_o$$

$$= \frac{TL}{G_i J_i + G_o J_o}$$

斷面剪應力分佈

$$\tau = \begin{cases} \dfrac{G_i Tr}{G_i J_i + G_o J_o} & 0 < r < R_i \\ \dfrac{G_o Tr}{G_i J_i + G_o J_o} & R_i < r < R_o \end{cases}$$

最大斷面剪應力

$$\tau_{i_{max}} = \frac{G_i T R_i}{G_i J_i + G_o J_o}$$

$$\tau_{o_{max}} = \frac{G_o T R_o}{G_i J_i + G_o J_o}$$

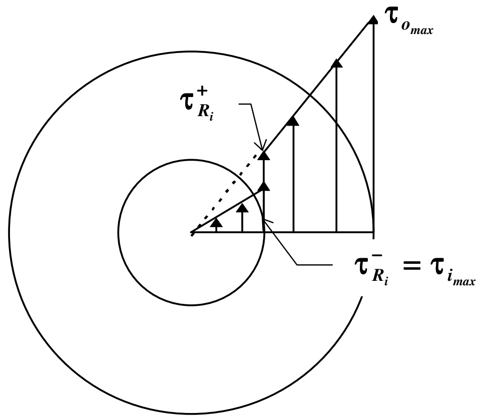
在內外軸交界：

$$\because r_i = r_o = R_o$$

$$\because \tau_{R_i}^{-} = \frac{G_i T R_i}{G_i J_i + G_o J_o} \;;\; \tau_{R_i}^{+} = \frac{G_o T R_i}{G_i J_i + G_o J_o}$$

若 $G_o \rangle G_i$ 則斷面剪

應力分佈如右：

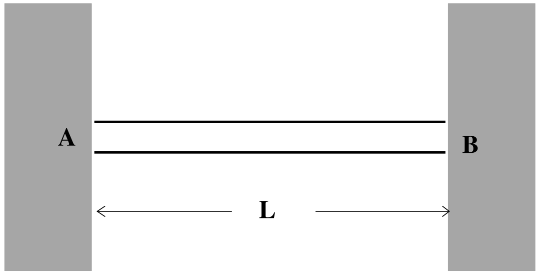


（二）兩端固定的圓桿

受扭矩作用的兩端固定圓桿，因有兩個未知數，靜力平衡只能列出一個扭矩平衡方程式，故有待利用扭轉角關係求出所有的反力（扭矩）。

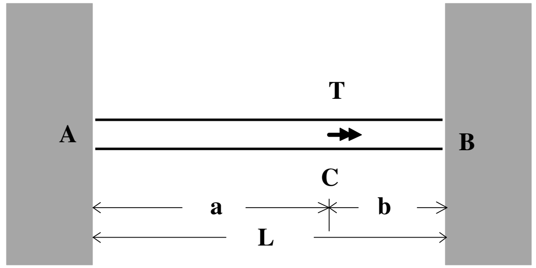
典型的兩端固定圓桿如圖所示之 L 長度為的圓桿，兩端分別固定於 A 與 B 兩點。

由不同的負荷形式可採用不同的方法解析。



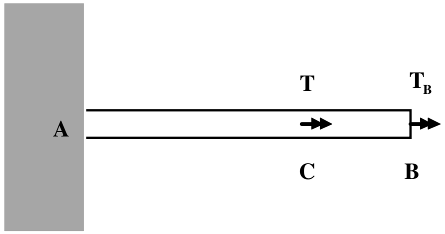
《例題》集中負荷

兩端固定的圓桿在 C 點有一集中扭矩作用。AC 距離為 a；BC 距離為 b。

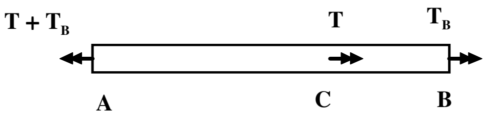


【柔度法】：解法一

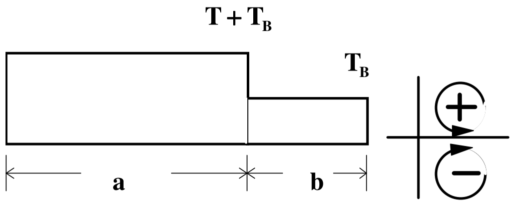
以 B 點的反扭矩T_B為贅力（指向右），並形成下圖之放鬆結構。



由靜力平衡求 A 點反力



畫成斷面扭矩分佈圖



C 點對 A 點的扭轉角：

$$\phi_{C/A} = \frac{(T + T_B)a}{GJ}$$

B 點對 C 點的扭轉角

$$\phi_{B/C} = \frac{T_B b}{GJ}$$

因為 B 點固定對 A 點的扭轉角為零

$$\phi_{B/A} = 0 = \phi_{B/C} + \phi_{C/A}$$

$$= \frac{(T + T_B)a}{GJ} + \frac{T_B b}{GJ}$$

解得

$$T_B = -\frac{a}{L}T$$

$T_B = \dfrac{aT}{L}$ 指向左；順時旋轉

由靜力平衡

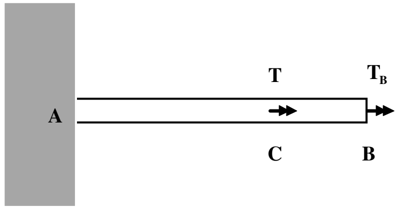
$$T_A + T_B = T$$

$$\therefore T_A = \frac{b}{L}T$$

指向左，順時旋轉

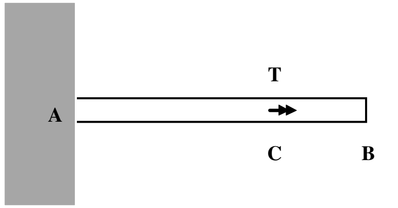
【柔度法】：解法二

以 B 點的反扭矩 T_B 為贅力（指向右），並形成下圖之放鬆結構。



利用重疊法將上述結構分解為

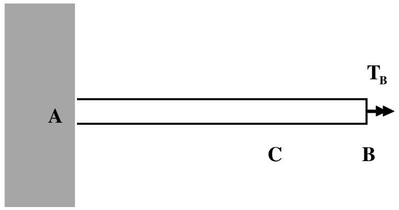
（1）



AC 間的斷面扭矩為 T

CB 間的斷面扭矩為 0

（2）



AB 間的斷面扭矩為 T_B

（1）T 產生 B 點對 A 點旋轉角：

$$\phi_{1B/A} = \frac{Ta}{GJ}$$

T_B 產生 B 點對 A 點旋轉角：

$$\phi_{2B/A} = \frac{TL}{GJ}$$

因為 B 點對 A 點的扭轉角為零

$$\phi_{B/A} = 0 = \phi_{1B/A} + \phi_{2B/A}$$

$$= \frac{Ta}{GJ} + \frac{T_B L}{GJ}$$

解得

$$T_B = -\frac{a}{L}T$$

$$T_B = \frac{a}{L}T$$ ；指向左，順時旋轉

由靜力平衡

$$T_A + T_B = T$$

$$\therefore T_A = \frac{b}{L}T$$

指向左，順時旋轉

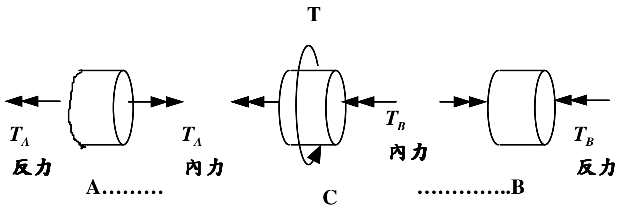
【勁度法】

決定圓桿的轉動只要一個自由度，故選取 C 點旋轉的角度 ϕ_c 為自由度。

假設 AC 段的斷面扭矩為 T_A（指向右）；

BC 段的斷面扭矩為 T_B（指向右）。

從 C 切一小段做靜力平衡如下：



$$T = T_A + T_B \ldots(1)$$

C 對 A 的扭轉角

$$\because \phi_{C/A} = \phi_C$$

$$\text{且}\ \phi_{C/A} = \frac{T_A a}{GJ}$$

$$\therefore T_A = \frac{GJ}{a}\phi_C \ldots(2)$$

C 對 B 的扭轉角

$$\because \phi_{C/B} = \phi_C$$

$$\text{且}\ \phi_{C/B} = \frac{T_B b}{GJ}$$

$$\therefore T_B = \frac{GJ}{b}\phi_C \ldots(3)$$

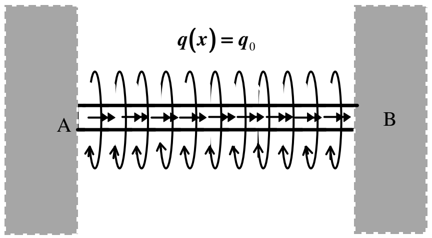
(2), (3)代入(1)得

$T_A = \dfrac{b}{L}T$ 指向左，順時旋轉

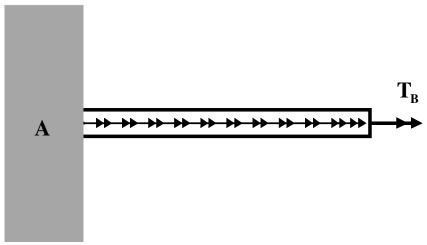
$T_B = \dfrac{a}{L}T$ 指向左，順時旋轉

《例題》均勻的分佈負荷

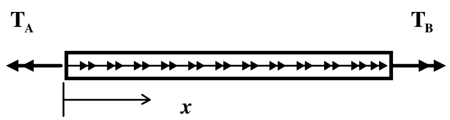
兩端固定的 AB 圓桿上有均勻的分佈負荷 $q(x)=q_0$。



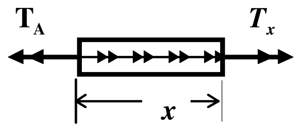
設 T_B 贅力指向右，則放鬆結構如下：



若 A 點反力舉為 T_A



在 x 位置：



【積分式】

在 x 位置的斷面扭矩（內力）為

$$T_x = T_A - q_o x$$

由扭轉角的積分式得

$$\phi_{x/A} = \int_0^x \frac{(T_A - q_0 x)dx}{GJ} = \frac{1}{GJ}\left(T_A x - \frac{1}{2} q_0 x^2\right)$$

由於 $\phi_{B/A} = 0$；L 代入 x

$$\frac{1}{GJ}\left(T_A L - \frac{1}{2} q_0 L^2\right) = 0$$

解得外力T_A

$$T_A = \frac{1}{2} q_0 L$$ …（指向左）

$\because T_x(L) = T_B$

$\therefore T_B = -\frac{1}{2} q_0 L$（與$T_x$正指向相反）

或 $T_B = \frac{1}{2} q_0 L$ …（指向左）

扭轉角：

$$\phi_{X/A} = \frac{q_0 L}{2GJ} X\left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

兩端為零，

極大值為

$$\phi = \frac{q_0 L^2}{8GJ}$$

位於$x = \frac{L}{2}$。

斷面扭矩：

$$T_X = \frac{q_0 L}{2}\left(1 - 2\frac{X}{L}\right)$$

【微分式】

由扭轉角的微分式

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{q_0}{GJ}$$

邊界條件（BC）：

$$\phi(0) = \phi_A = 0$$

$$\phi(L) = \phi_B = 0$$

解二階常微分方程式

$$\phi(x) = -\frac{q_0 x^2}{GJ} + C_1 x + C_2$$

代入邊界條件

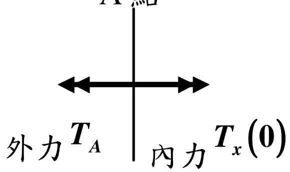
$$\phi(x) = \frac{q_0 L}{2GJ} x\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

斷面扭矩：

$$T = GJ\frac{d\phi}{dx}$$

$$= \frac{q_0 L}{2}\left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

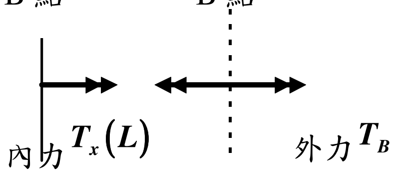
A 點



$$T_x(x) = \frac{1}{2}q_0 L$$

$$T_A = \frac{1}{2}q_0 L \ \ldots（指向左）$$

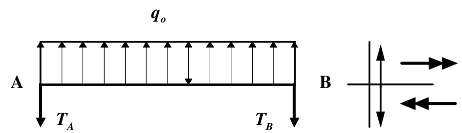
B 點　　　　B 點



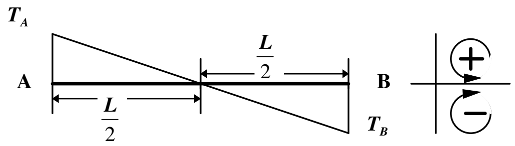
$$\therefore T_x(L) = -\frac{1}{2}q_0 L$$

$$T_B = \frac{1}{2}q_0 L \ \ldots（指向左）$$

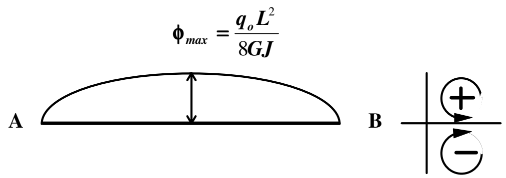
負荷分佈圖



斷面扭矩分佈圖



扭轉角圖



最大斷面剪應力

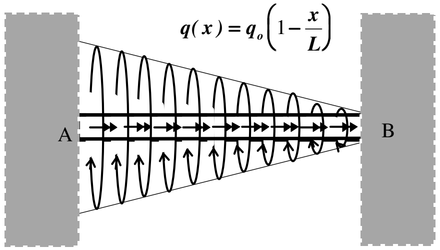
$$\left|\tau_{max}\right| = \frac{T_{max} R}{J}$$

$$= \frac{q_o L}{2} \cdot \frac{R}{\frac{\pi}{2} \cdot R^4}$$

$$= \frac{q_o L}{\pi R^3}$$

《例題》變化的分佈負荷

兩端固定的 AB 圓桿上有變化的分佈負荷 $q(x)=q_0\left(1-\frac{x}{L}\right)$。



【微分式】

由扭轉角的微分式

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\frac{q_0}{GJ}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

邊界條件（BC）：

$$\phi(0)=\phi_A=0$$

$$\phi(L)=\phi_B=0$$

解二階常微分方程式

$$\phi(x)=\frac{q_0x^3}{6GJL}-\frac{q_0x^2}{2GJ}+c_1x+c_2$$

代入邊界條件

$$\phi(x)=\frac{q_0L}{6GJ}x\left(2-3\left(\frac{x}{L}\right)+\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

斷面扭矩：

$$T=GJ\frac{d\phi}{dx}$$

$$=\frac{q_0L}{6}\left(2-6\left(\frac{x}{L}\right)+3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

$$T_x(0)=\frac{1}{3}q_0L$$

$T_A=\frac{1}{3}q_0L$ …（指向左）

$$T_x(L)=-\frac{1}{6}q_0L$$

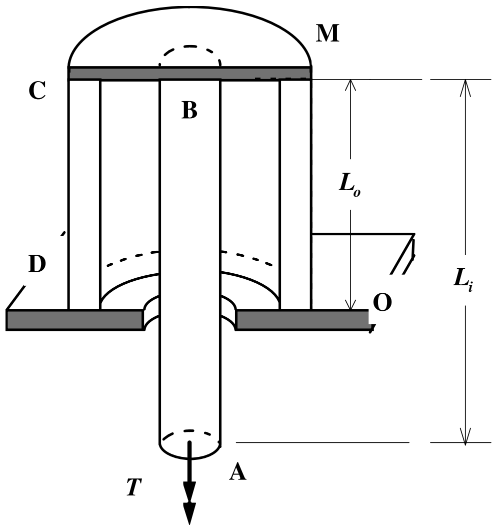
即 $T_B=\frac{1}{6}q_0L$ …（指向左）

五、相對扭轉

（一）絕對扭轉角

以固定點為參考點的扭轉角為絕對扭轉角。由扭轉角公式所得的是針對軸上一參考點的相對扭轉角；若參考點也做扭轉時，則必須考慮各點的相對扭轉，再合計出絕對扭轉角。

《例題》AB 軸長 L_i，斷面極慣性矩為 G_i，剪彈性係數為 J_i；套筒 CD 長 L_o，斷面極慣性矩為 G_o，剪彈性係數為 J_o。軸的 B 端與套筒的 C 端固定於一剛體圓盤上，套筒的 C 端固定於固定板 O。求 A 點對固定點的扭轉角。



【解】

因 B 固定在 M 上，A 對 B 的相對扭轉角與 A 對 M 的相對扭轉角相同。

$$\phi_{A/B} = \phi_{A/M} = \frac{TL_i}{G_i J_i}$$

C 固定在 M 上，D 固定在不動的 **O** 上，M 對固定點的扭轉角與 **C** 對 **D** 的扭轉角相同。

$$\phi_{M/O} = \phi_{C/D} = \frac{TL_o}{G_o J_o}$$

所以 A 的絕對扭轉角

$$
\begin{aligned}
\phi_A &= \phi_{A/O} \\
&= \phi_{A/M} + \phi_{M/O} \\
&= \phi_{A/B} + \phi_{C/D} \\
&= \frac{TL_i}{G_i J_i} + \frac{TL_o}{G_o J_o}
\end{aligned}
$$

（二）靜定齒輪系的扭轉角

齒輪系常用來改變轉速與扭矩輸送力。動力機（M）的輸出經齒輪系傳送至至作業機（O）。

齒輪 A，B 嚙合旋轉時必須滿足

1. 靜力平衡：

$$\frac{T_A}{T_B}=\frac{R_A}{R_B}$$

T,R 分別為扭矩與齒輪的半徑。

2. 位移守衡：

$$R_A\phi_A=R_B\phi_B$$

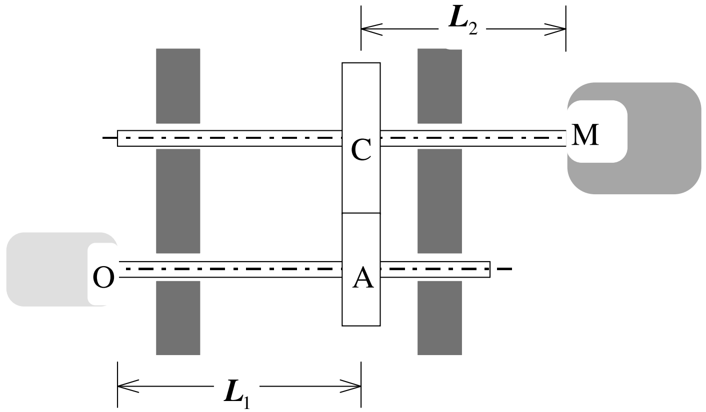
ϕ 為轉動的角度。

由扭矩的作用，各軸產生相對扭轉角。因各轉軸都在旋轉，通常扭轉角以作業機的動力入口端為參考點，以其扭轉角為零，將此點視為固定點。

若輸入、輸出扭矩可直接用靜力平衡求得的稱為靜定齒輪系。

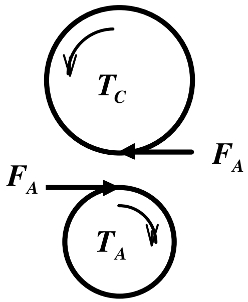
《例題》

如圖之齒輪系，若動力機輸出扭矩為 T。求輸入端 M，對 O 點的扭轉角。齒輪 A 與 C 的半徑分別為 R_A,R_C 。



【解】

假設齒輪 $\boldsymbol{C}$ 以逆時針方向旋轉



由靜力平衡

$$T_C = R_C F_C$$

$$T_A = R_A F_A$$

$$\therefore T_A = \frac{R_A}{R_C} T_C$$

由位移關係

$$R_A \phi_A = R_C \phi_C$$

$$\therefore \phi_A = \frac{R_C}{R_A} \phi_C$$

動力機輸出扭矩 $\boldsymbol{T}$，M 對 C 的扭轉角：

AO 軸的輸入扭矩 T_A ，A 對 O 的扭轉角：

$$T_A = \frac{R_A}{R_C} T_c$$

$$= \frac{R_A}{R_C} T$$

$$\phi_{A/O} = \frac{R_A}{R_C} \frac{TL_1}{GJ}$$

因為 O 點固定，齒輪 C 的扭轉角為：

$$\phi_o = 0$$

$$\phi_{A/O} = \phi_A$$

$$\phi_C = \frac{R_A}{R_C} \phi_A$$

$$= \left(\frac{R_A}{R_C}\right)^2 \frac{TL_1}{GJ}$$

M 點的絕對扭轉角：

$$\phi_M = \phi_{M/C} + \phi_C$$

$$= \frac{TL_2}{GJ} + \left(\frac{R_A}{R_C}\right)^2 \frac{TL_1}{GJ}$$

$$= \left(\frac{R_A^2}{R_C^2} L_1 + L_2\right) \frac{T}{GJ}$$

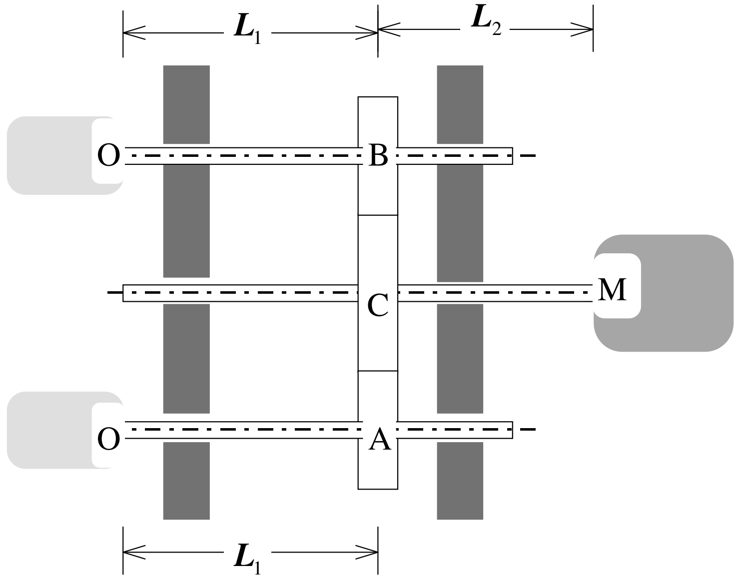
（三）靜不定齒輪系的扭轉角

若齒輪系輸入、輸出扭矩無法直接用靜力平衡求得的稱為靜不定齒輪系。

常見的靜不定齒輪系如：一個動力機輸入，有數個作業機輸出的變速系統。各輸出軸的輸出必須靠扭轉角關係求得。

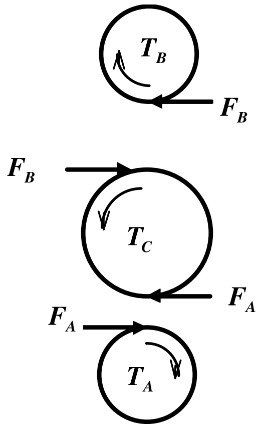
《例題》

如圖之齒輪系，若動力機輸出扭矩為 $\boldsymbol{T}$。求 AO 與 BO 軸的輸出扭矩；輸入端 $\boldsymbol{M}$ 對 $\boldsymbol{O}$ 點的扭轉角。若齒輪 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{C}$ 的半徑分別為 $\boldsymbol{R_A, R_B, R_C}$ 。



【解】

假設齒輪 C 以逆時針方向旋轉



由靜力平衡：

$$T_A = R_A F_A;\quad T_B = R_B F_B$$

$$T_C = R_C\left(F_A + F_B\right)$$

$$= R_C\left(\frac{T_A}{R_A} + \frac{T_B}{R_B}\right) \cdots (1)$$

由位移守衡：

$$\phi_{C/O} = \frac{R_A}{R_C}\phi_{A/O};\quad \phi_{C/O} = \frac{R_B}{R_C}\phi_{B/O}$$

輸出扭矩分配：

$$\therefore R_A\phi_{A/O} = R_B\phi_{B/O}$$

$$R_A \cdot \frac{T_A L_1}{GJ} = R_B \cdot \frac{T_B L_1}{GJ}$$

$$\therefore T_B = \frac{R_A}{R_B} T_A$$

代入(1)

$$T = T_c = R_C\left(\frac{T_A}{R_A} + \frac{T_A R_A}{R_B^2}\right)$$

解得：

$$T_A = \frac{R_A R_B^2}{R_C\left(R_A^2 + R_B^2\right)} T$$

$$T_B = \frac{R_A^2 R_B}{R_C\left(R_A^2 + R_B^2\right)} T$$

齒輪 C 的扭轉角：

$$\phi_{C/O} = \frac{R_B}{R_C}\phi_{B/O}$$

$$= \frac{R_B}{R_C}\frac{T_B L_1}{GJ}$$

$$= \frac{R_A^2 R_B^2}{R_C^2\left(R_A^2 + R_B^2\right)}\frac{TL_1}{GJ}$$

輸入點 M 的絕對扭轉角：

$$\phi_{M/C} = \frac{TL_2}{GJ}$$

$$\phi_M = \phi_{M/C} + \phi_{C/O}$$

$$= \left(\frac{R_A^2 R_B^2}{R_c^2\left(R_A^2 + R_B^2\right)}L_1 + L_2\right)\frac{T}{GJ}$$

$$= \left(\frac{R_B^2}{R_c^2\left(1 + {R_B^2}/{R_A^2}\right)}L_1 + L_2\right)\frac{T}{GJ}$$

【特例】

1. $R_A = R_B$ ：

輸出扭矩分配：

$$T_A = T_B = \frac{R_A}{2R_c}T$$

扭轉角：

$$\phi_M = \phi_{M/C} + \phi_C$$

$$= \left(\frac{R_A^2}{2R_C^2}L_1 + L_2\right)\frac{T}{GJ}$$

2.只有一個齒輪 A： $R_B \to \infty$

輸出扭矩：

$$T_A = \frac{R_A}{R_C}T$$

扭轉角：

$$\phi_M = \left(\frac{R_A^2}{R_C^2}L_1 + L_2\right)\frac{T}{GJ}$$

六、軸的動力輸送

（一）軸的輸送功率

軸的輸送功率 P：

$$P = \omega T$$

其中 $\omega = 2\pi f$

名　稱	符　號	英制單位	SI 單位
功率	P	$lb-ft/sec$	$W = N\cdot m/sec$
扭矩	T	$lb-ft$	$N\cdot m$
角速度	ω	rad/sec	rad/sec
轉速	f	$Hz(1/sec)$	$Hz(1/sec)$

常用單位：

$$1rpm = \frac{1}{60}Hz$$

hp(horse power)馬力:

$$1hp = 550\,lb-ft/s$$
$$= 6600\,lb-in/s$$
$$= 0.745KW$$

PS 公制馬力：

$$1PS = 0.75KW$$

（二）軸的分析

1.已知軸的尺寸(R,J)與材質(τ_{allow})，轉速等，求最大容許輸送功率。

2.已知軸的尺寸(L,J)與材質(G)，轉速及扭轉角等，求此時輸送的功率。

（三）軸的設計

1.已知輸出功率與轉速，以及軸的材質(τ_{allow})，求實心軸的直徑。

2.求空心軸的直徑時，必須再增加一條件，如內外徑比、最大扭轉角等。