第二章 軸向負荷

一、軸向負荷
二、軸向負荷元件的應力
三、靜定元件的變形
四、靜不定元件的變形
五、結構的位移
六、熱應力

一、軸向負荷
(Axial Loading)

（一）特徵

1.元件的任意斷面其形心都在一直線上。(要件)
2.二力元件且外力作用於形心線上。(要件)
3.在在斷面上內力的合力作用於形心上且沒有合力矩產生。(結果)

（二）常見的元件：

1.簡單的軸向力元件

2.桁架（Truss）：
軸向力元件所構成的結構

二、軸向負荷元件的應力

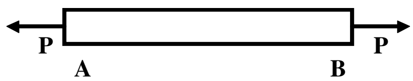
（二）內力分佈

1.負荷分佈圖：

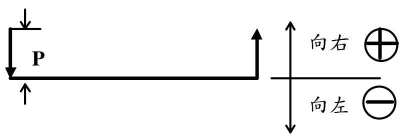
由自由體圖與靜力平衡計算反力；
將作用力與反力繪成負荷分佈圖。

符號規則：反力向右為『+』；
反力向左為『−』。

《例》二力元件的負荷分佈圖



負荷分佈圖

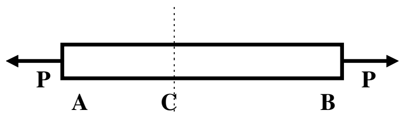


2. 內力分佈圖：

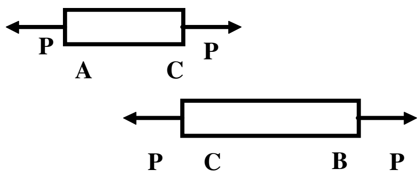
將元件分段取自由體圖，計算出每段斷面的內力，整理畫成內力分佈圖。

符號規則：
正斷面（平面指向為右的斷面）向右的內力為『+』；反之為『−』。
負斷面（平面指向為左的斷面）向左的內力為『+』；反之為『−』。

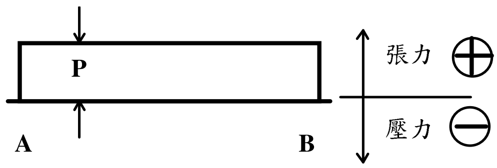
《例》張力二力元件的內力分佈圖



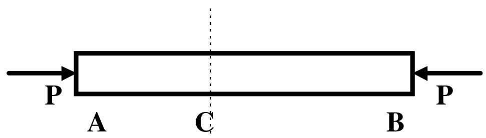
由 C 點切開計算內力



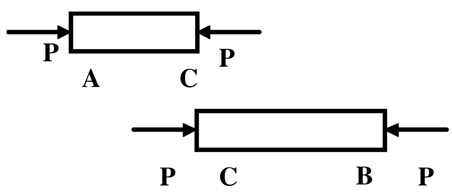
內力分佈圖



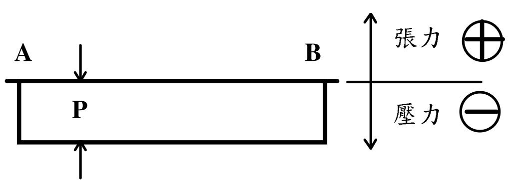
《例》壓力二力元件的內力分佈



由 C 點切開計算內力



內力分佈圖



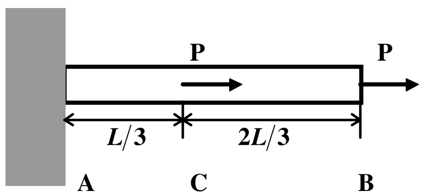
3.負荷分佈圖與內力分佈圖關係

(1)內力抵銷集中負荷。

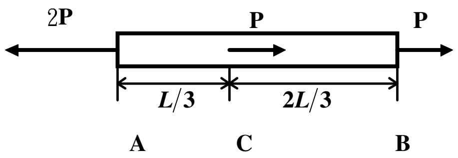
(2)內力是負荷的積分；負荷分佈圖是內力分佈圖的『負』斜率分佈圖。

(3)自由端的內力為『0』。

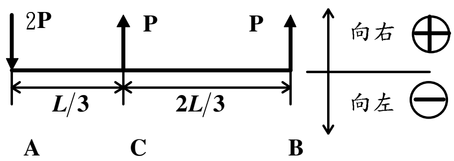
《例》多個外力的軸向負荷



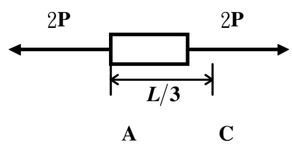
自由體圖



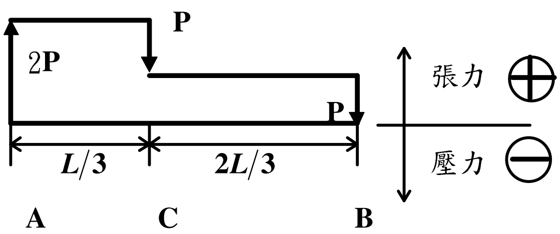
負荷分佈圖



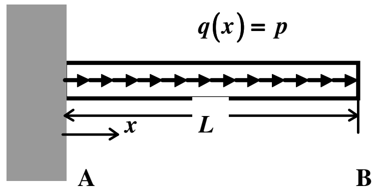
在C點左邊的內力　　　在C點右邊的內力



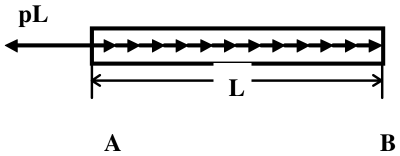
內力分佈圖



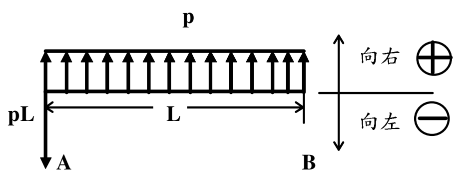
《例》連續外力的軸向負荷



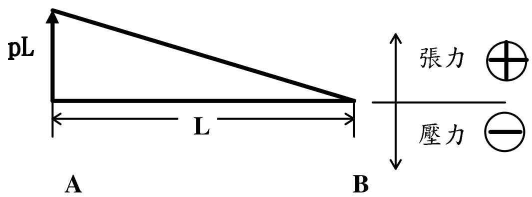
自由體圖



負荷分佈圖



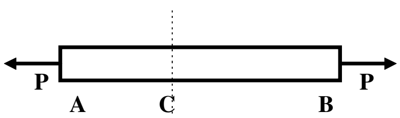
內力分佈圖



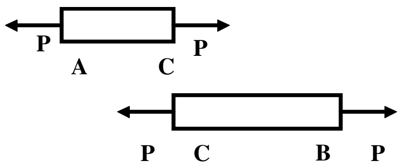
（二）斷面正應力

1. 垂直斷面的正應力

一般未特別註明的斷面正應力指垂直斷面而言。



在C點垂直切開求內力



斷面正向力為 P ；斷面剪力為零

若斷面的截面積為 A

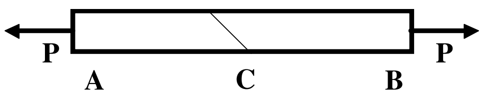
正應力：

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

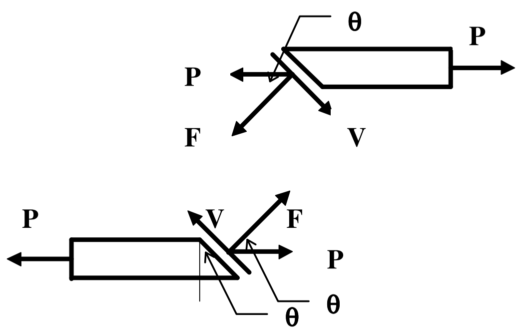
剪應力：

$$\tau = 0$$

2.傾斜斷面的正應力



在C點以一夾角切開



正向力：

$$F = P \cdot \cos\theta$$

剪力：

$$V = -P \cdot sin\,\theta$$

傾斜面面積：

$$A_{\theta} = \frac{A}{\cos\theta}$$

正應力：

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta}$$

$$= \frac{p}{A}\cos^2\theta$$

剪應力：

$$\tau = \frac{V}{A_\theta}$$

$$= -\frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$$

$$= -\frac{P}{2A}\sin(2\theta)$$

最大正應力：

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \quad @\ \theta = 0$$

最大剪應力：

$$\tau_{max} = \pm\frac{P}{2A} \quad @\ \theta = \pi/4$$

3.應力分佈圖：

將應力分佈圖除以該位置的截面積即為應力分佈圖。

符號規則：

正斷面（平面指向為右的斷面）向右的應力為『+』即為張力；反之為『-』即為壓力。

負斷面（平面指向為左的斷面）向左的應力為『+』；反之為『-』。

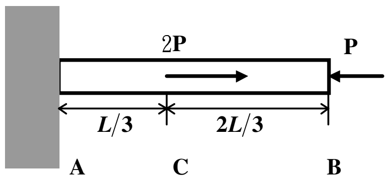
正內力 ⇒ 正的正應力 ⇒ 張（應）力
負內力 ⇒ 負的正應力 ⇒ 壓（應）力

4.內力分佈圖與應力分佈圖關係

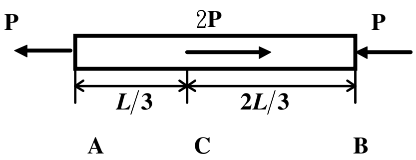
若元件的截面積固定，則應力分佈圖與內力分佈圖，形狀相同，只是單

位不同。

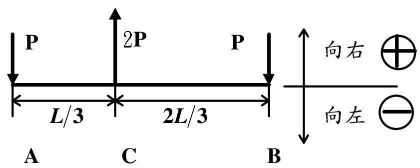
《例》多個外力元件的應力分佈



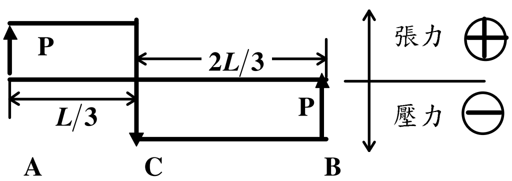
自由體圖



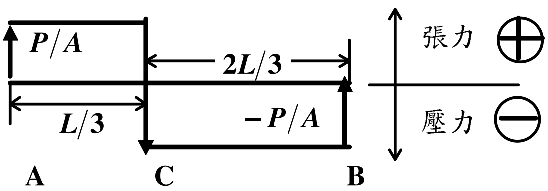
負荷分佈圖



內力分佈圖



應力分佈圖

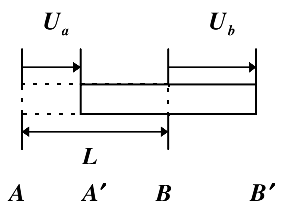


三、靜定元件的變形

（一）定義

1.靜定元件
（Statically Determinate Elements）：
元件所有的反力可以依靠靜力平衡求得。

2.直線變形（Deformation）與正應變：
直線變形的定義：
元件或結構上的兩點之相對位移為變形。



若 A 與 B 兩點受力後之位移別為U_a與U_b；
則 AB 線段之線變形量為：

$$\delta_{b/a} = \left(U_b - U_a\right)$$

若 AB 線段變形前距離為 L，

則正應變$\varepsilon_{b/a}$，

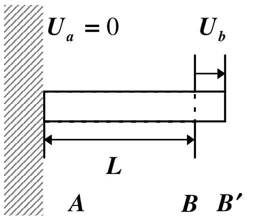
$$\varepsilon_{b/a} = \frac{\delta_{b/a}}{L}$$

以微分式表示：

$$\varepsilon_x = \frac{dU_x}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{dU_y}{dy}$$

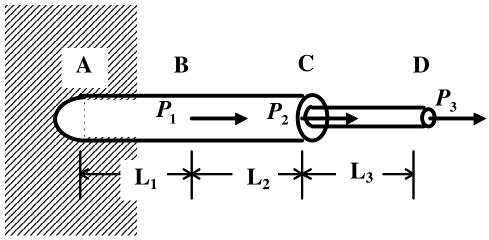
$$\varepsilon_z = \frac{dU_z}{dz}$$



若 A 點為固定端，B 點對 A 點的相對位移為絕對位移

$$\delta_b = U_b$$

（二）位移的積分式



應力：

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

應變：

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\delta = \varepsilon L$$

變形量：

$$= \frac{PL}{AE}$$

若元件由許多不同長短、大小與材料構成，且每段的內力不同，則將每段的位移累加成：

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

以積分式表示：

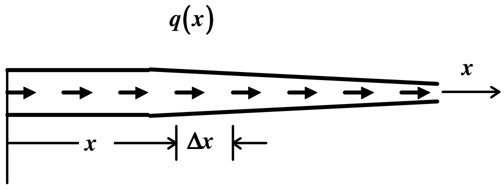
$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E(x)}$$

（三）位移的微分式

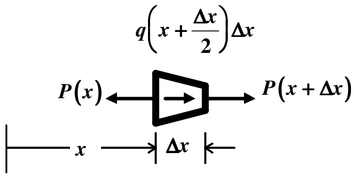
微分式常用於計算分佈負荷所產生的位移。

位移微分式的推導：

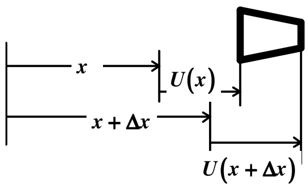
若有一元件受分佈負荷$q(x)$作用



Δx 小段的靜力平衡



Δx 小段的位移



由 Δx 小段靜力平衡得：

$$P(x+\Delta x)+q(x)\cdot\Delta x=P(x)$$

對微小的 Δx

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}+q(x)=0$$

$$\frac{dP}{dx}+q(x)=0 \quad ...(1)$$

由 Δx 小段的位移關係得：

$$\delta = U(x+\Delta x) - U(x)$$

對微小的 Δx

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{dU}{dx}\end{aligned}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE};\ \ \varepsilon = \frac{P}{AE}$$

$$\begin{aligned}P &= AE\varepsilon \\ &= AE\frac{dU}{dx} \quad \text{...(2)}\end{aligned}$$

式(2)代入(1)得

$$\frac{d}{dx}\left(AE\frac{dU}{dx}\right) + q(x) = 0$$

或寫成：

$$AEU'' = -q(x)$$

此為二階常微分方程式需要兩個邊界條件。
位移邊界條件：
在啟始端為固定點或參考點，位移為零

$$\therefore\ U(0)=0$$

外力的邊界條件：(只能用一個)

$$AEU'(0)=-P(0)=-R_0$$

或 $$AEU'(L)=-P(L)=R_L$$

$P(0),P(L)$分別為作用於原點與L正斷面的內力；

R_0,R_L 分別為作用於原點與 L 的外力(向右為正)。

(四)位移圖

將元件各段利用位移公式計算出的位移量，以一端為參考點，累計畫成位移圖。

符號規則：

對參考點伸長為『+』；縮短為『-』。

位移圖與應力分佈圖關係

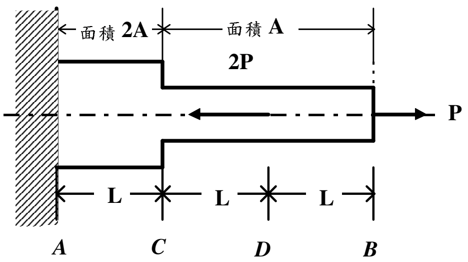
若元件彈性係數固定

(1)位移是應力的積分；應力分佈圖是位移圖的斜率分佈圖。

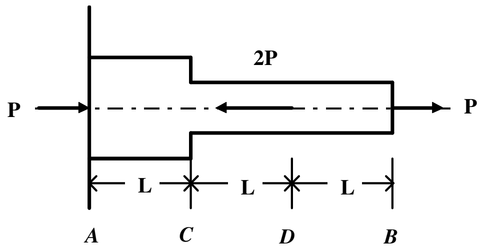
(2)參考點(固定端)的位移為『0』。

《例》位移積分式

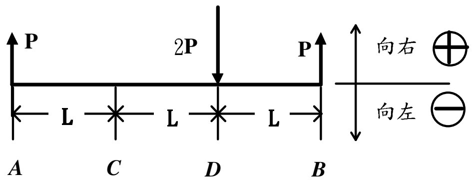
求下列元件的伸長量



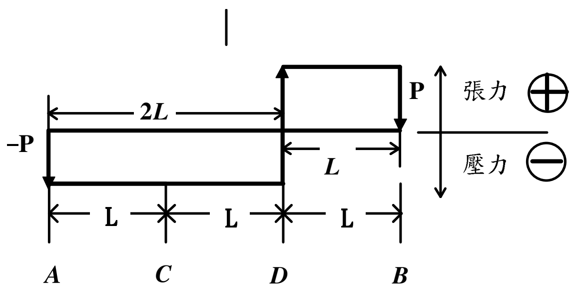
自由體圖：



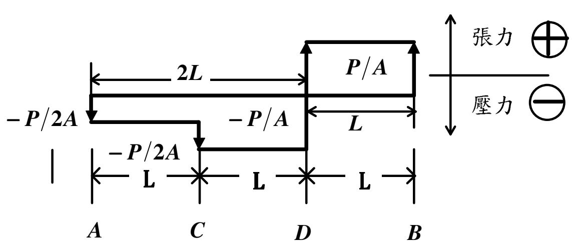
負荷分佈圖：



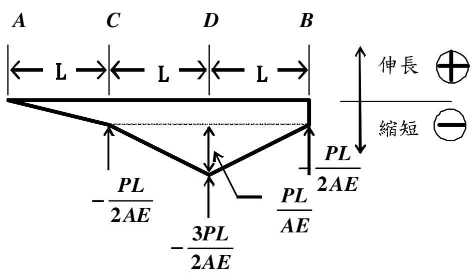
內力分佈圖：



應力分佈圖：



位移圖：



伸長量：

$$\delta = \sum_i \delta_i = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

$$= -\frac{PL}{2AE} - \frac{PL}{AE} + \frac{PL}{AE}$$

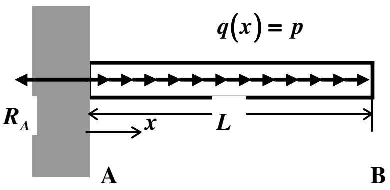
$$= -\frac{PL}{2AE}$$

縮短：$\frac{PL}{2AE}$

《例》位移微分式

求下列元件在 **B** 點的位移。

在 **A** 點的反力：



$$R_A = \int_0^L p\,dx = pL$$

位移積分式：

$$AEU'' = -p$$

邊界條件：

$$U(0) = 0$$

$$AEU'(0) = pL$$

解得：

$$AEU = -\frac{1}{2}px^2 + c_1x + c_2$$

代入邊界條件：

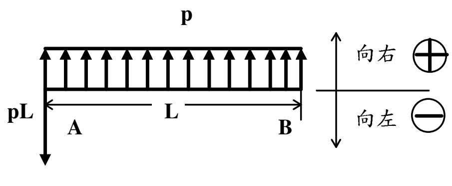
$$AEU = -\frac{1}{2}px^2 + pLx$$

在端點的伸長量為：

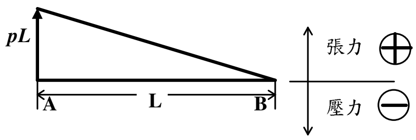
$$\delta(L) = U(L)$$

$$= \frac{pL^2}{2AE}$$

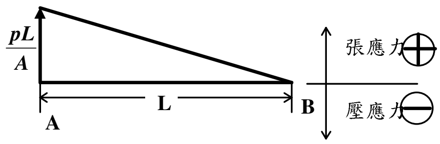
負荷分佈圖



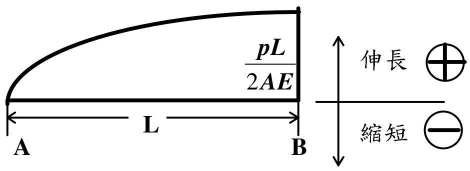
內力分佈圖



應力分佈圖



位移圖



以位移積分式計算：

內力分佈函數：

$$P = -px + pL$$

位移積分式

$$\delta(x) = \int_{o}^{x} \frac{P(x)dx}{AE}$$

$$= \int_{o}^{x} \frac{(-px + pL)dx}{AE}$$

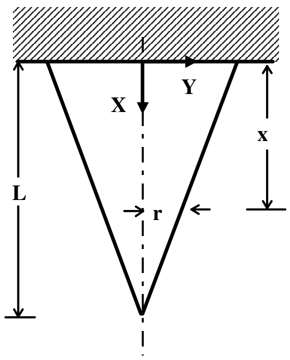
$$= -\frac{1}{2}px^{2} + pLx$$

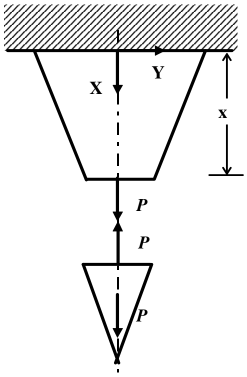
所以在端點的伸長量為：

$$\delta(L) = \frac{pL^{2}}{2AE}$$

《例》自重伸長

一圓錐體體懸掛於天花板上，因其本身的重量而使圓錐體伸長。若圓錐體的半徑為 R_o ，高度為 L ，密度為 γ ，試求其端點的伸長量。





【解】

在 x 位置：

圓錐體的重量與截面積為：

$$P = \gamma \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 (L - x)$$

$$A = \pi r^2$$

在截面的應力

$$\sigma_x = \frac{1}{3}\gamma(L - x)$$

在 x 位置圓錐的伸長量

$$\delta_x = \int_0^x \frac{\gamma \frac{1}{3}\pi r^2 (L - x)}{\pi r^2 E} dx$$

$$= \frac{\gamma}{3E}\int_0^x (L - x) dx$$

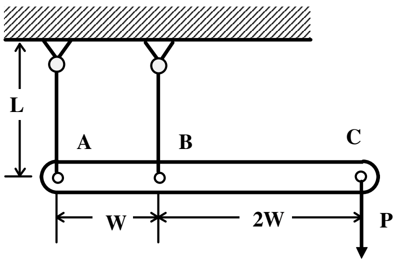
$$= \frac{\gamma x^2}{6E}$$

總伸長量：

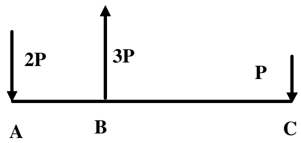
$$\delta_L = \frac{\gamma L^2}{6E}$$

《例》懸掛系統

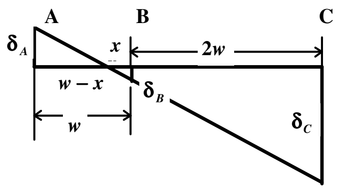
求下列懸掛系統 A,B 元件的應力，C 點的位移。



靜力平衡：



位移關係：



【解】

由靜力平衡：

$F_A = 2P$ （壓力）

$F_B = 3P$ （張力）

應力公式：

$\sigma_A = 2P/A$ （壓力）

$\sigma_B = 3P/A$ （張力）

由位移的幾何關係：

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{w-x}{x} \quad ...(1)$$

應變公式：

$$\delta_A = 2PL/AE \text{ ；} \delta_B = 3PL/AE \quad ...(2)$$

(2)代入(1)

$$\frac{w-x}{x} = \frac{2PL/AE}{3PL/AE} = \frac{2}{3}$$

解得

$$x = \frac{3}{5}w$$

同理由位移幾何關係：

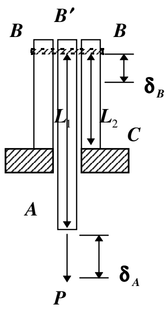
$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{2w + \frac{3}{5}w}{\frac{3}{5}w} = \frac{13}{3}$$

解得：

$$\begin{aligned}\delta_C &= \frac{13}{3}\delta_B \\ &= \frac{13PL}{AE}\end{aligned}$$

《例》相對伸長量

如下圖的構件，AB 的長度爲 L_1，$B'C$ 的長度爲 L_2，$B'B$ 以銷相連接，C 點爲固定點，若各元件的材料相同，E 值爲已知，截面積 A 均相同。問在 A 點受外力 P 作用時，位移與外力的關係。



$$\delta_B = \frac{PL_2}{2AE}$$

$$\delta_{A/B} = \delta_B - \delta_A$$

$$= \frac{PL_1}{AE}$$

$$\delta_A = \delta_{A/B} + \delta_B$$

$$= \frac{PL_1}{AE} + \frac{PL_2}{2AE}$$

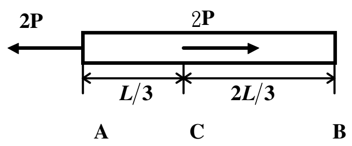
若 $L_1 = L_2 = L$

$$\delta_A = \delta_{A/B} + \delta_B$$

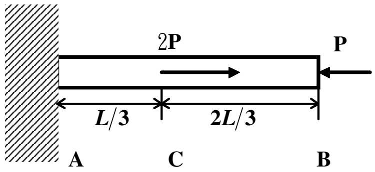
$$= \frac{3PL}{2AE}$$

（五）重疊法(Superposition methods)

因負荷與變形具有線性變化的關係，當一元件或結構受到多個負荷時，可分別考慮每個負荷單獨作用的影響，然後將所有結果加起來。

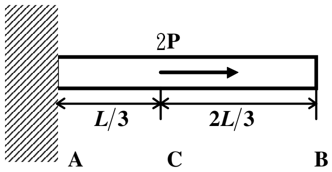


《例》重疊法

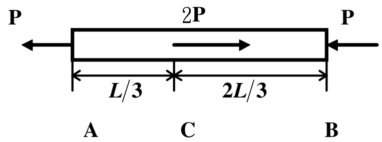


可以分解成：

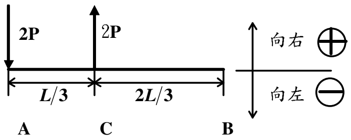
部份自由體圖：

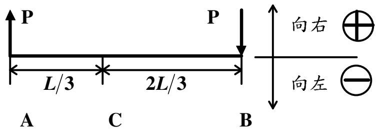


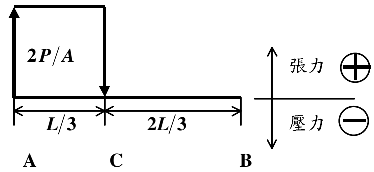
合成自由體圖：



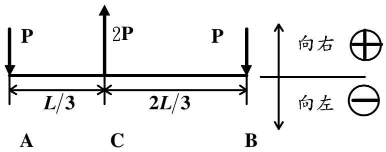
部份負荷分佈圖：



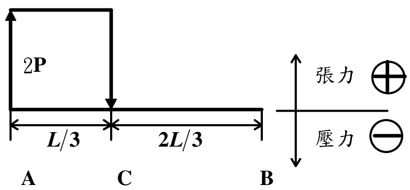


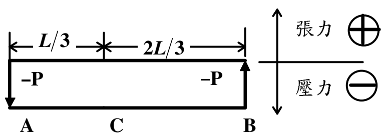


合成負荷分佈圖：

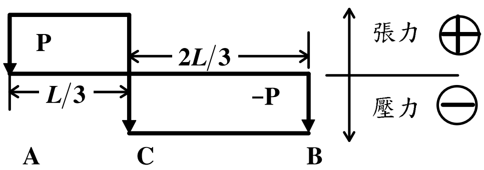


部份內力分佈圖：



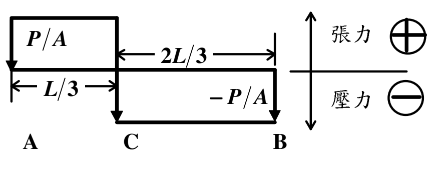


合成內力分佈圖：



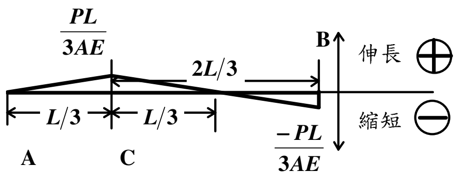
部份應力分佈圖：

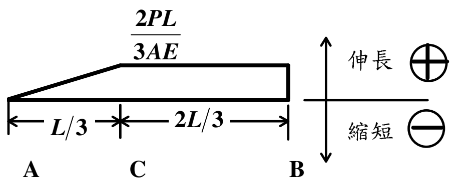
合成應力分佈圖：



部份位移圖：

合成位移圖：





四、靜不定軸向負荷元件

（一）定義：

靜不定元件：

Statically Indeterminate elements

元件的反力無法僅靠靜力平衡求得，還需借助於位移的關係。

靜不定元件反力的求法常用的有：

1. 柔度法(Flexibility Methods)

又稱為力法(Force Methods)

2. 勁度法(Stiffness Methods)

又稱為位移法(Displacement Methods)

（二）柔度法

1.設未知贅力(Redundant forces)

贅力數目=反力總數-力平衡方程式總數

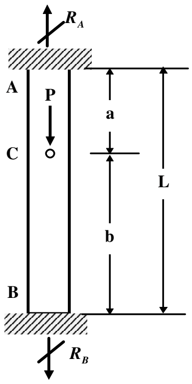
2.假設贅力為已知，以贅力與外力形成之靜定結構（稱為放鬆結構；Released structure），列出靜力平衡方程式組。

3.列出位移關係的方程式，以贅力與外力的作用產生原結構某些特定點的位移。（稱為位移的一致性： compatibility of displacement）

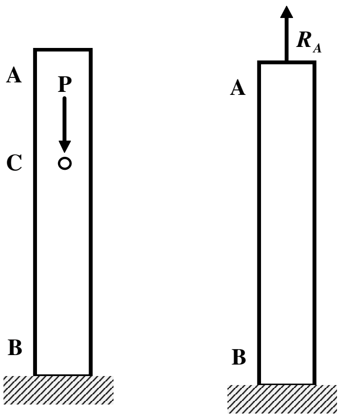
4.將上述關係代入靜力平衡方程式，解出其他外力。

《例》兩端固定桿

有一桿兩端 A、B 固定，一軸向外力 P 施於桿中一點 C。求兩端的反力各為何。



【解】設未知贅力 R_A ，並以重疊法分解成兩個元件。



設定 A 點反力為贅力 R_A；方向向上。

靜力平衡：

假設反力 R_B 方向向下；

$$R_B = R_A - P \quad \ldots(1)$$

位移關係：

A 點固定無位移；$\delta_A = 0$

$$\delta_A = -\frac{Pb}{AE} + \frac{R_A L}{AE} = 0$$

$$\therefore R_A = \frac{Pb}{L} \ldots(2)$$

將(2)代入(1)得

$$R_B = \frac{P(b-L)}{L}$$
$$= -\frac{Pa}{L}$$

負號表示R_B的方向與假設相反；正確方向應向上。

（三）勁度法

1.選擇適當的點為節點，節點的數目稱為自由度(Degree of freedom)。自由度的數目應足夠決定各元件的位移。

2.將各元件的位移表示成節點的位移。

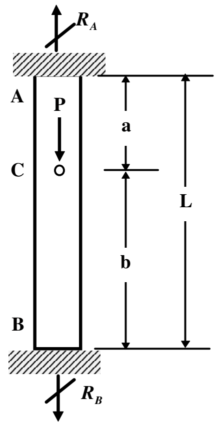
3.將各元件的內力表示成節點位移的函數；進而將反力以節點位移表示。

4.完成靜力平衡，將節點位移代入靜力平衡方程式，求解。

5.由解得的節點位移計算出各元件內力，進而求得各點反力。

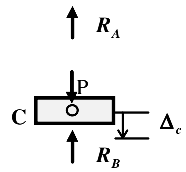
《例》兩端固定桿

有一桿兩端 A、B 固定，一軸向外力 P 施於桿中一點 C。求兩端的反力各為何。



【解】

取外力點 C 為節點，假設其位移為 Δ_C；方向向下。



假設兩端反力 R_A, R_B，如圖示方向向上。

由 C 點取 AC、CB 兩段自由體；其變形分別為 δ_{CA}，δ_{CB}，

且 $\delta_{CA} = -\delta_{CB} = \Delta_C$

由變形公式得：

$$\delta_{CA} = \frac{R_A a}{AE}$$

$$\delta_{CB} = -\frac{R_B b}{AE}$$

$$\therefore R_A = \frac{AE}{a}\delta_{CA}$$
$$= \frac{AE}{a}\Delta_C \quad \ldots(1)\text{；}$$

$$R_B = -\frac{AE}{b}\delta_{CB}$$
$$= \frac{AE}{b}\Delta_C \quad \ldots(2)$$

由靜力平衡：

$$R_A + R_B = P \quad \ldots(3)$$

式(1)、(2)代入(3)得

$$\left(\frac{AE}{a} + \frac{AE}{b}\right)\Delta_C = P$$

解得

$$\Delta_C = \frac{Pab}{AEL} \quad \ldots(4)$$

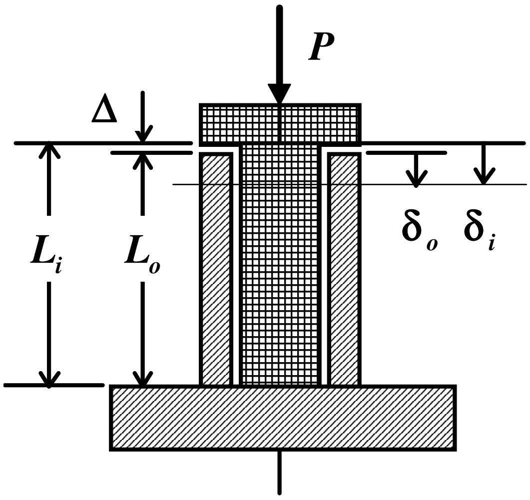
(4)分別代入(1)與(2)得

$$R_A = \frac{Pb}{L} \qquad R_B = \frac{Pa}{L}$$

《例》同心軸。

如圖示同心軸，兩軸的長度不同，$L_i - L_o = \Delta$。軸上有一負荷 P，若負荷大到足以使內、外軸一起變形。求內、外軸內力比 P_o / P_i

	形　式	長度	截面積	內力	彈性係數
內軸	實心軸	L_i	A_i	P_i	E_i
外軸	套筒軸	L_o	A_o	P_o	E_o



靜力平衡：

$$P_i + P_o = P \quad \ldots(1)$$

由位移關係得：

$$\delta_i = \delta_o + \Delta \quad \ldots(2)$$

變形公式：

$$\delta_i = \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \qquad \delta_o = \frac{P_o L_o}{A_o E_o}$$

代入(2)

$$\therefore \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{P_o L_o}{A_o E_o} + \Delta \quad \ldots(3)$$

(1)與(3)聯立解得

$$P_i = \frac{P L_o + A_o E_o \Delta}{L_o + \left(A_o E_o L_i / A_i E_i\right)}$$

$$P_o = \frac{P L_i - A_i E_i \Delta}{L_i + \left(A_i E_i L_o / A_o E_o\right)}$$

因 $L_i \cong L_o$

$$\therefore \frac{P_o}{P_i} = \frac{P L_i A_o E_o - A_i E_i A_o E_o \Delta}{P L_o A_i E_i + A_i E_i A_o E_o \Delta}$$

【特例】

內外軸使用相同材料，且截面積相同時：

$$A_i E_i = A_o E_o = AE$$

$$\therefore \frac{P_o}{P_i} = \frac{PL - AE\Delta}{PL + AE\Delta}$$

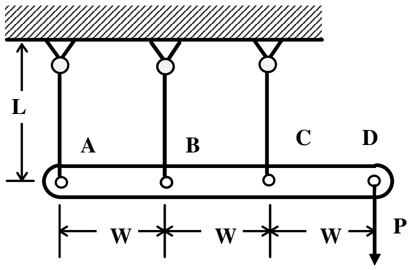
【特例】
若無間隙的同心軸

$$\because \Delta = 0; \ \ L_i = L_o$$

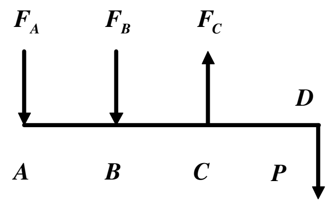
$$\frac{P_o}{P_i} = \frac{A_o E_o}{A_i E_i}$$

《例》靜不定懸吊

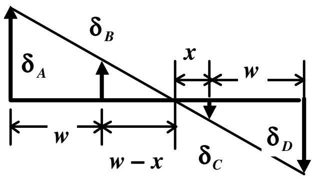
如圖所示 ABCD 為一剛體，分別由三支彈性桿（可以線性伸長與縮短）懸吊於 A、B、C 三點。求此三支彈性桿的作用力。



假設靜力平衡為：



位移關係：



【柔度法】

假設點的反力為贅力 F_C

假設反力方向如圖所示，由靜力平衡：

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_A + F_B + P = F_C \;\ldots(1)$$

$$\Sigma M_A = o$$

$$F_B + 3\cdot P = 2F_c \;\ldots(2)$$

由位移關係

$$\frac{\delta_B}{\delta_C}=\frac{w-x}{x}$$

$$=\frac{F_B L/AE}{F_C L/AE}=\frac{F_B}{F_C}$$

$$\frac{\delta_A}{\delta_C}=\frac{2w-x}{x}$$

$$=\frac{F_A L/AE}{F_C L/AE}=\frac{F_A}{F_C}$$

經整理得

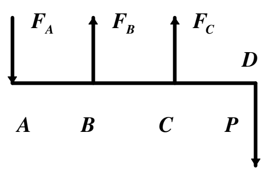
$$F_A-2F_B-F_C=0 \quad \ldots(3)$$

將式(1),(2),(3)聯立解得

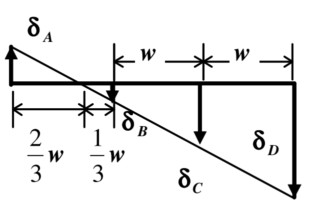
$$\begin{cases} F_A=\dfrac{2}{3}P \\ F_B=-\dfrac{1}{3}P \\ F_C=\dfrac{4}{3}P \end{cases}$$ 與假設方向相反

$$x=\frac{4}{3}w$$

正確的靜力平衡圖



正確的位移圖

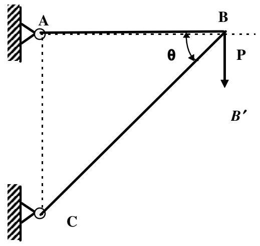


五、結構的位移

（一）位移圖

1.真正的位移

結構上各接點的真正位移是依據各元件受力伸長或縮短後的長度畫弧後所得的交點。



2.微小變量的位移圖

繪製程序:

(1)先求(或假設)內力的大小。

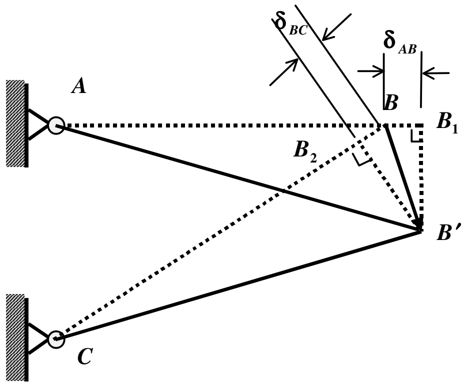
(2)依據內力大小求得伸長與縮短量。

(3)在原元件上延長或短縮。

(4)在變形後的終點畫元件的垂直線。

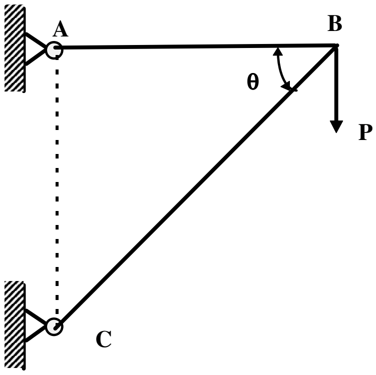
(5)各垂直線的交點為變行後的新位置。

(二)靜定結構



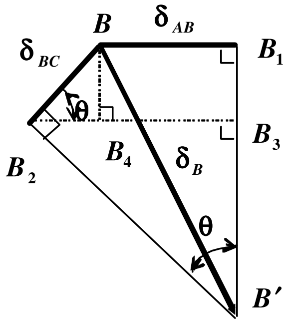
《例》靜定結構的位移

如圖示之靜定結構，受一外力 P。求 B 點的水平位移與垂直位移。



位移圖：

B 點放大圖:



由靜力平衡求各元件的內力

$$F_{AB} = P\cot\theta \quad (張力)$$

$$F_{BC} = P\csc\theta \quad (壓力)$$

計算出伸長與縮短量

$$\delta_{AB} = \frac{P\cot\theta \cdot L_{AB}}{AE} \quad (伸長)$$

$$\delta_{BC} = \frac{P\csc\theta \cdot L_{BC}}{AE} \quad (縮短)$$

在原結構上作圖；由幾何關係得

水平位移：

$$\begin{aligned}\delta_H &= \delta_{AB} \\ &= \frac{P\cot\theta \cdot L_{AB}}{AE}\end{aligned}$$

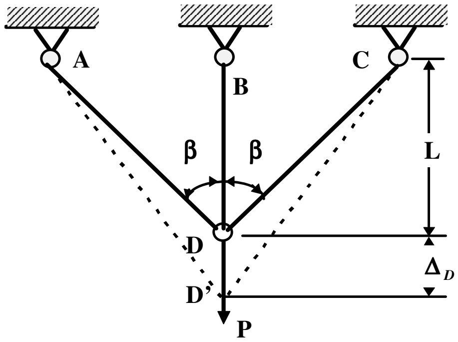
垂直位移：

$$\begin{aligned}\delta_V &= \delta_{BC}\sin\theta + \left(\delta_{BC}\cos\theta + \delta_{AB}\right)\cot\theta \\ &= \delta_{BC}\csc\theta + \delta_{AB}\cot\theta\end{aligned}$$

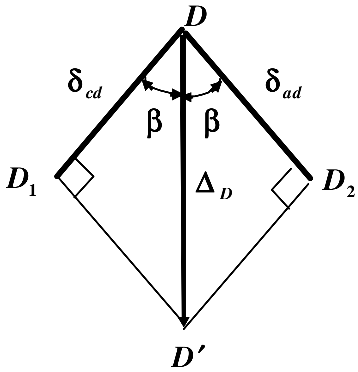
(三)靜不定結構

《例》靜不定結構的位移

如圖之三連桿靜不定結構，受一向下力 P，求 D 點的位移。



D 點放大圖：



【勁度法】

取 D 點為節點，其位移為向下 Δ_D

由幾何關係得桿 AD 與 CD 的伸長量 δ_A 與 δ_C

$$\delta_A = \delta_C = \Delta_D \cos\beta$$

又因桿 AD 與 CD 的長度為

$$L_{AD} = L_{CD} = \frac{L}{\cos\beta}$$

變形公式為

$$\delta_A = \frac{F_{AD}L_{AD}}{AE}$$

可計算得內力

$$F_{AD} = \frac{\Delta_D \cos^2\beta \cdot AE}{L}$$ (張力)

同理 BD 的伸長量

$$\delta_B = \frac{F_{BD} L_{BD}}{AE}$$

$$\delta_B = \Delta_D ; \quad L_{BD} = L$$

$$\therefore F_{BD} = \frac{\Delta_D \cdot AE}{L} \text{ (張力)}$$

D 點的靜力平衡方程式為

$$2F_{AD} \cos\beta + F_{BD} = P$$

$$\therefore 2\frac{\Delta_D \cos^2\beta \cdot AE}{L} \cos\beta + \frac{\Delta_D \cdot AE}{L} = P$$

解得

$$\Delta_D = \frac{PL}{\left(1 + 2\cos^3\beta\right) AE}$$

六、熱應力
(Thermal Stress)

（一）熱應變(Thermal Strain)

受熱所產生的變形率。

$$\varepsilon_T = \alpha(\Delta T)$$

1.工程伸長率(常用)

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

2.實際伸長率

$$dL = \alpha L dT$$

$$\int_L^{L+\delta F} \frac{dL}{L} = \alpha \int_T^{T+\Delta T} dT$$

$$\frac{L+\delta_T}{L} = Exp(\alpha\Delta T)$$

$$\delta_T = L\left(Exp(\alpha\Delta T) - 1\right)$$

（二）熱應力(Thermal Stress)

1.定義

限制熱變形所產生之應力。

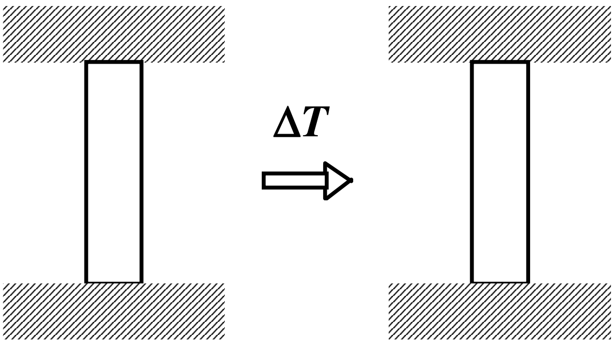
若元件受力與熱伸長時，產生伸長量 δ

$$\delta = \underbrace{\frac{PL}{AE}}_{\text{受力變形}} + \underbrace{\alpha L \Delta T}_{\text{熱膨脹}}$$

則其應變為

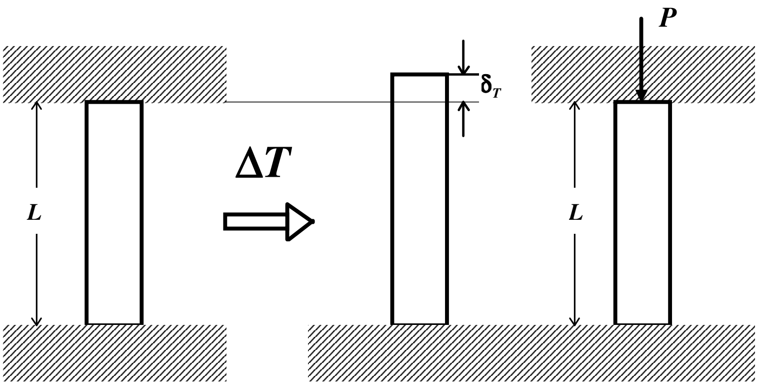
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

考慮下列固定於一定間隙的元件，假設無外力作用，且間隙固定 $\varepsilon = 0$，當溫度增高 ΔT



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T = 0 \qquad \therefore \sigma = -E\alpha\Delta T$$

熱應力亦可作如下考慮：



受熱伸長 δ_T，再以外力 P 壓回原來長度，

使$\varepsilon = 0$

$$\delta_T = \alpha L \Delta T$$

$$\delta_T = -\frac{PL}{AE}$$

$$\therefore \sigma = -\frac{P}{A}$$

$$= -E\alpha\Delta T$$

所以若元件受外力與熱應力作用時，兩種應力之和為:

$$\sigma = \underbrace{E\varepsilon}_{\text{張應力}} - \underbrace{E\alpha\Delta T}_{\text{熱應力}}$$

《例》

一螺桿(B)以螺帽鎖緊於套管(T)內，其截面積與彈性係數分別為

$A_B, A_{T,}, E_B, E_T$。若先將螺桿加熱ΔT並用手鎖緊後再旋緊 d 距離。問冷卻後之

應力？螺桿的線膨脹係數為α_B。

【解】

在螺帽與套筒的接處面：

$$F_T + F_B = 0$$

其中F_T, F_B分別表示作用於套筒與螺桿的外力。

若螺桿被迫伸長量為δ_B（正值），

套筒被壓縮量為δ_T（負值）。

$$F_B = \frac{E_B A_B}{L}\delta_B \underbrace{+}_{\text{螺桿冷卻收縮時造成張力}} E_B A_B \alpha_B \Delta T \quad \ldots(1)$$

$$F_T = \frac{E_T A_T}{L}\delta_T \quad \ldots(2)$$

位移關係

$$L - d + \delta_B = L + \delta_T$$

$$\delta_B - d = \delta_T \ \ldots(3)$$

(1)，(2)代入(3)

$$\frac{E_B A_B}{L}\delta_B + \frac{E_T A_T}{L}\delta_T = -E_B A_B \alpha_B \Delta T$$
$$\frac{E_B A_B}{L}\delta_B + \frac{E_T A_T}{L}(\delta_B - d) = -E_B A_B \alpha_B \Delta T$$

解得

$$\delta_B = \frac{d\frac{E_T A_T}{L} - E_B A_B \alpha_B \Delta T}{\left(\frac{E_B A_B}{L} + \frac{E_T A_T}{L}\right)}$$

代入(1)

$$F_B = \frac{E_B A_B}{L} \cdot \frac{d\frac{E_T A_T}{L} - E_B A_B \alpha_B \Delta T}{\left(\frac{E_B A_B}{L} + \frac{E_T A_T}{L}\right)} + E_B A_B \alpha_B \Delta T$$

【特例】

若與例題相同的元件，鎖緊未加熱，

$\therefore \Delta T = 0$ 得

$$F_B = \frac{d}{\left(\frac{L}{E_T A_T} + \frac{L}{E_B A_B}\right)}$$

與 P.57 相似